**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

**ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА**

**А. І. Колосов, Ю. Є. Печеніжський,
С. О. Станішевський, А. В. Якунін**

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

(для студентів 2 курсу заочної форми навчання
за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка
підприємства" і 6.030509 "Облік і аудит")

Харків ХНАМГ 2011

Теорія ймовірностей і математична статистика: Конспект лекцій (для студентів 2 курсу заочної форми навчання за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства” і 6.030509 “Облік і аудит”) / А. І. Колосов, Ю. Є. Печеніжський, С. О. Станішевський, А. В. Якунін; Харк. нац. акад. міськ. госп-ва. − Х.: ХНАМГ, 2011. − 128 с.

Автори: А. І. Колосов,
Ю. Є. Печеніжський,
С. О. Станішевський,
А. В. Якунін

Рецензент: *к. ф.-м. н., доц.. М. П. Данилевський*

Подано конспект лекцій, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання, зразками розв’язання типових задач і запитаннями для самоконтролю.

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики.
Протокол № 4 від 23.11.2011 р.

Передмова

Теорія ймовірностей – це математична наука, що вивчає закономірності масових однорідних випадкових (стохастичних) явищ.

Випадкові відхилення завжди супроводжують будь-яке явище. Елемент невизначеності, складності, багатопричинності, що притаманний випадковим явищам, обумовлює створення спеціальних методів для їх вивчення.

На практиці спостереження за масовою сукупністю однорідних випадкових об’єктів відкривають у них цілком певні, властиві саме їм закономірності, свого роду стійкості. Мета ймовірнісних (статистичних) методів полягає в тому, щоб, обминаючи надто складне і часто практично неможливе дослідження окремих випадкових явищ, звернутися безпосередньо до законів, що керують їх масовими проявами. Вивчення цих законів дозволяє здійснювати прогноз середнього масового результату, цілеспрямовано впливати на хід явищ, контролювати їх, обмежувати сферу дії випадковості, звужувати її вплив.

Теорія ймовірностей служить фундаментом, на якому будуються важливі для практичних застосувань її органічні доповнення – математична статистика та теорія випадкових процесів.

Математична статистика – це розділ математики, в якому вивчаються методи збору, обробки й аналізу великих масивів стохастичних дослідних даних з метою виявлення закономірностей. Користуючись апаратом теорії ймовірностей, математична статистика дозволяє оцінювати ступінь точності та надійності висновків, що одержуються при обробці дослідних даних. Вона застосовується при плануванні й організації виробництва, аналізі технологічних процесів, контролі якості продукції, вивченні закономірностей еволюції систем прикладного характеру, що розвиваються в умовах стохастичної невизначеності, та в багатьох інших сферах.

Практично немає галузі науки, техніки чи суспільного життя, де б не використовувалися статистичні методи. Ознайомлення з ними необхідне сьогодні кожному освіченому фахівцю, оскільки його не можна вважати професійно грамотним, якщо він не може дати кількісної оцінки правильності вибору дій в умовах стохастичної невизначеності, здатних привести до виграшу чи втрат, статистично обґрунтувати вибір прийнятого рішення з оперативного керування виробництвом.

Змістовий модуль 1.

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

1.1. Випадкові події

1.1.1. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей. Основні означення

Масовим явищем називається таке, що властиве великій кількості рівноправних об'єктів. Під ***рівноправними об'єктами*** розуміють результати досліджень у різних галузях, що повторюються при однакових основних умовах.

Дослідом (***експериментом***, ***спостереженням***) називається відтворення якого-небудь певного комплексу основних умов, що може бути повторений скільки завгодно разів.

Випадковим (***стохастичним***) називається дослід, результат якого передбачити завчасно неможливо внаслідок наявності значної кількості неврахованих сторонніх факторів (перешкод, збурень, шумів).

Кожна реалізація випадкового експерименту при одних і тих же врахованих основних умовах називається ***випробуванням***.

Основні умови, що зберігаються незмінними, в загальних рисах визначають результат довільного випробування в межах даного експерименту, а другорядні – змінюються від випробування до випробування і вносять випадкові відмінності в конкретний результат.

Подією називається довільне явище, про яке можна сказати, що воно здійснюється чи не здійснюється в результаті випробування. Події позначаються великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, ….

<u>Приклад 1</u>. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані кульки різного кольору, навмання виймається одна кулька – це випадковий експеримент. Окрема його реалізація – це випробування. Поява (чи не поява) білої (чорної, жовтої, …) кульки – це подія.

Усі події діляться на достовірні, неможливі і власне випадкові.

Достовірною називається подія, що у результаті випробування неодмінно повинна відбутися (позначається U).

Неможливою називається подія, що у результаті випробування нізащо не може відбутися (позначається $\varnothing$).

Випадковою (***стохастичною***) називається подія, що при багаторазовому повторенні експерименту в одних випробуваннях відбувається, а в інших – ні.

Приклад 2. Розглянемо експеримент – однократне кидання симетричного грального кубика з шести гранями, які відмічені цифрами від одиниці до шести, і фіксація числа, що випадає на його верхній грані. Результатом такого експерименту буде випадіння однієї з цифр (очок) 1, 2, 3, 4, 5 або 6. Тоді достовірна подія – випадіння числа в межах від 1 до 6. Неможлива подія – випадіння числа 12. Випадкова подія – випадіння непарного числа, тобто 1, 3, 5.

Декілька подій називаються ***сумісними***, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших у тому ж випробуванні.

Декілька подій називаються ***несумісними***, якщо ніякі дві з них не можуть відбутися одночасно в одному випробуванні.

Приклад 3. В експерименті – однократне кидання грального кубика – сумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння непарного числа очок, а несумісними подіями є випадіння цифри 3 і випадіння парного числа очок.

Декілька попарно несумісних подій утворюють ***повну групу*** (***сукупність єдино можливих подій***), якщо в результаті випробування одна і тільки одна з них неодмінно повинна відбутися.

Приклад 4. Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Повну групу $\{A, B, C\}$ складають такі події: A={випадіння цифри 1 чи 2}, B={випадіння цифри 3 чи 4}, C={випадіння цифри 5 чи 6}. Повною групою також є $\{D, E\}$, де D={випадіння парного числа}, E={випадіння непарного числа}.

Декілька подій в експерименті називаються ***рівноможливими***, якщо об'єктивно поява будь-якої з них у результаті випробування не більш можлива, ніж поява іншої. Рівноможливі події мають рівний ступінь об'єктивної можливості (рівні "шанси") відбутися в результаті випробування.

Приклад 5. Розглянемо експеримент – однократне кидання грального кубика. Шість подій – випадіння цифри відповідно 1, 2, 3, 4, 5, 6 – є рівноможливими. Рівноможливими також є дві події – випадіння парного числа і випадіння непарного числа. Випадіння цифри 3 і випадіння парного числа є нерівноможливими подіями.

Протилежними називаються дві несумісні події, що утворюють повну групу (є єдино можливими). Їх позначають через A і $\overline{A}$. Протилежна до A подія $\overline{A}$ полягає в тому, що подія A не відбувається. Протилежною для достовірної U є неможлива подія $\varnothing$ і навпаки: $\overline{U} = \varnothing$ і $\overline{\varnothing} = U$.

Приклад 6. В експерименті – однократне кидання грального кубика – протилежними подіями є A={випадіння цифри, що не більша 4} і $\overline{A}$={випадіння цифри 5 чи 6}.

Появу випадкової події у конкретному випробуванні не можна завчасно спрогнозувати, оскільки випробування протікають по-різному і передбачити точний хід кожного з них неможливо. Проте зрозуміло, що достатньо великі серії однорідних випробувань підкоряються цілком певним закономірностям, оскільки в цьому випадку невраховані сторонні фактори зрівноважують (гасять) один одного.

Для характеристики, як часто подія може відбутися чи не відбутися в результаті випробувань, вводиться поняття ***ймовірність*** випадкової події – числова міра ступеню об'єктивної можливості появи даної події в результаті випробувань. Імовірність події A позначається $P(A)$.

За одиницю виміру ймовірності прийнято ймовірність достовірної події U: $\boxed{P(U)=1}$. Імовірність неможливої події $\varnothing$ прийнята за нуль: $\boxed{P(\varnothing)=0}$. Відповідно ймовірність будь-якої випадкової події A лежить між нулем і одиницею: $\boxed{0 \le P(A) \le 1}$. Це співвідношення задає ***шкалу ймовірностей***.

1.1.2. Класичний і статистичний методи визначення ймовірності випадкової події

Імовірність випадкової події можна визначити класичним методом тільки тоді, коли результати експерименту утворюють повну групу несумісних рівноможливих подій. Такі події традиційно називають ***випадками***, а відповідний експеримент – класичною теоретико–ймовірнісною ***схемою випадків***. У рамках цієї схеми можна точно підрахувати ймовірність події, не проводячи фактично випробувань.

Випадок називається ***сприятливим*** до події A, якщо його поява тягне за собою появу цієї події.

Якщо дослід зводиться до схеми випадків, то *ймовірність події A дорівнює відношенню числа сприятливих випадків m до їх загального числа n*: $\boxed{P(A) = m/n}$ (***класичне визначення ймовірності***).

Зауваження 1. Імовірність події A можна знайти різними способами у залежності від того, яку повну групу рівноможливих подій відповідного експерименту вважати випадками.

Приклад 1. В експерименті – однократне кидання грального кубика – визначити ймовірність $P(A)$ події A={випадіння парного числа очок}.

□ Розв'яжемо задачу двома способами.

Перший спосіб. За випадки приймемо повну групу подій: випадіння 1, 2, 3, 4, 5 і 6 очок. Тоді загальна кількість випадків $n = 6$, а число сприятливих випадків до події A $m = 3$ (випадіння 2, 4 чи 6 очок). Шукана ймовірність $P(A) = m/n = 3/6 = 0{,}5$.

Другий спосіб. За випадки приймемо повну групу з двох протилежних подій: A={випадіння парного числа очок} і B={випадіння непарного числа очок}. Тоді загальна кількість випадків $n = 2$, а число сприятливих випадків до події A $m = 1$ (випадіння парного числа очок). Шукана ймовірність $P(A) = m/n = 1/2 = 0{,}5$. ■

Приклад 2. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані 8 зелених, 5 жовтих і 7 червоних кульок, навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірність $P(A)$ події A={вийнята кулька зеленого кольору}.

□ Загальна кількість кульок $n = 8 + 5 + 7 = 20$. Число сприятливих випадків $m = 8$. Тоді шукана ймовірність

$$P(A) = m/n = 8/20 = 0{,}4. \quad ■$$

Імовірність достовірної події дорівнює 1, оскільки такій події сприяють всі можливі випадки. Імовірність неможливої події дорівнює 0, оскільки їй не сприяє ні один з можливих випадків.

Імовірність протилежної події $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$. Дійсно, якщо події A зі всіх n випадків сприяють m, то їй не сприяють $n-m$ випадків (вони сприяють протилежній події $\overline{A}$). Тому

$$P(\overline{A}) = (n-m)/n = 1 - m/n = 1 - P(A).$$

Звідси *сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*.

Якщо події в досліді не зводяться до схеми випадків, то оцінку ймовірності події A можна зробити тільки статистично, проводячи відповідні випробування.

Нехай у межах деякого експерименту проведена серія з n випробувань, у кожному з яких могла з'явитися чи не з'явитися подія A. ***Відносною частотою*** $W_n(A)$ події A називають відношення числа випробувань m, де ця подія відбулася, до загального числа проведених випробувань n: $\boxed{W_n(A) = m/n}$.

Очевидно, що

$$0 \le W_n(A) \le 1, \quad W_n(U) = 1, \quad W_n(\varnothing) = 0.$$

При незначній кількості випробувань n відносна частота $W_n(A)$ носить випадковий характер. Дослідження показують, що зі збільшенням числа випробувань відносна частота $W_n(A)$ появи події A проявляє ***властивість статистичної стійкості***: вона все менше відхиляється від деякого сталого числа, що й приймається за значення ймовірності $P(A)$: $\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} W_n(A)}$ (***статистичне визначення ймовірності***). Відповідно за наближене значення ймовірності $P(A)$ беруть відносну частоту $W_n(A)$ при достатньо великій кількості випробувань n: $\boxed{P(A) \approx W_n(A)}$.

Зазначена властивість є одним з проявів ***закону великих чисел*** і більш строго буде сформульована далі.

Наприклад, при багатократному киданні симетричної монети відносна частота появи герба мало відрізняється від числа 0,5 – ймовірності цієї події.

<u>Зауваження 2</u>. З того, що ймовірність деякої події A дорівнює одиниці, ще не випливає достовірність цієї події A. Аналогічно, якщо ймовірність деякої події A дорівнює нулю, це ще не означає що подія A – неможлива.

1.1.3. Елементи комбінаторики

Для підрахунку кількості всіх можливих випадків n і числа сприятливих випадків m часто використовують різні комбінаторні співвідношення.

Комбінаторика – це розділ математики, що займається підрахунком числа різного типу комбінацій (вибірок), складених з елементів скінченної множини за певними правилами.

При розв’язуванні комбінаторних задач використовують наступні два аксіоматичні правила.

Правило суми. *Якщо об’єкт a можна вибрати k способами, а об’єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір об’єкта “ a або b ” може бути здійснений $k+m$ способами.*

Тут зв’язка *або* вживається в розділовому сенсі.

Приклад 1. У місті N знаходяться $k=7$ технічних ВНЗ, $m=2$ медичних і $n=3$ гуманітарних. Скількома способами S можна отримати вищу освіту за державним набором у цьому місті?

□ Оскільки державний набір передбачає безоплатну освіту тільки в одному ВНЗ, то можна застосувати правило суми. Згідно з цим правилом число способів $S=k+m+n=7+2+3=12$. ■

Правило добутку. *Якщо об’єкт a можна вибрати k способами, а після кожного з цих виборів об’єкт b – іншими m способами (незалежно від вибору a), то вибір упорядкованої пари (a,b) може бути здійснений $k \times m$ способами.*

Приклад 2. На групу з $k=24$ студентів видається $m=30$ тем рефератів і $n=25$ тем курсових робіт по одному завданню кожного виду на одного студента. Скількома способами S це можна зробити?

□ Оскільки кожний студент повинен підготувати тільки один реферат і виконати тільки одну курсову роботу, то можна застосувати правило добутку. За цим правилом

$$S=k \times m \times n=24 \times 30 \times 25=18000 . \quad ■$$

Нехай $M=\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ – деяка скінченна множина з n елементів. Розглянемо основні типи комбінацій – перестановки, розміщення та сполучення.

Комбінації з n елементів, які відрізняються одна від одної тільки порядком елементів, називаються ***перестановками***.

Кількість таких перестановок позначають символом P_n, де n – число елементів, що входять у кожну перестановку.

<u>Приклад 3</u>. Нехай множина M містить три букви A, B і C. Скласти всі можливі упорядковані комбінації з цих букв по три в кожній без повторення.

□ Одержимо: $A\ B\ C$, $C\ A\ B$, $B\ A\ C$, $B\ C\ A$, $C\ B\ A$, $A\ C\ B$ (6 комбінацій). Видно, що вони відрізняються одна від одної тільки порядком розташування букв. Дійсно, на перше місце в комбінації (перестановці) можна поставити три букви. На друге місце вже можна поставити тільки дві букви із трьох (одна посіла перше місце), а на третьому виявиться тільки одна (та, що залишилася). Виходить, $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, але $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$. Прийшли до поняття факторіала. ■

Добуток усіх натуральних чисел від 1 до n включно називають n***-факторіалом*** і пишуть: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$.

Вважають, що $0! = 1$ і $1! = 1$. Основна властивість факторіала: $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Число перестановок обчислюють за формулою $\boxed{P_n = n!}$.

Комбінації з n елементів по m елементів, які відрізняються одна від одної самими елементами або порядком елементів, називаються ***розміщеннями***. Тут зв'язка *або* вживається в об'єднуючому сенсі.

Кількість таких розміщень позначаються символом A_n^m, де n – число всіх наявних елементів, m – число елементів у кожній комбінації. ***Число розміщень*** обчислюють за формулою

$$\boxed{A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)},$$

де $n \ge m \ge 0$; $m, n \in N \cup \{0\}$. Вважають, що $A_n^0 = 1$.

<u>Приклад 4</u>. Нехай множина M містить п'ять букв A, B, C, D і E. Скласти всі комбінації тільки з двох букв без повторення і з врахуванням порядку.

□ Одержимо: $A\ B$, $A\ C$, $A\ D$, $A\ E$, $B\ A$, $B\ C$, $B\ D$,

$B\ E$, $C\ A$, $C\ B$, $C\ D$, $C\ E$, $D\ A$, $D\ B$, $D\ C$, $D\ E$, $E\ A$, $E\ B$, $E\ C$, $E\ D$. Видно, що всі отримані комбінації (їх 20) відрізняються або буквами, або їхнім порядком (комбінації $A\ B$ і $B\ A$ вважають різними).

За наведеною формулою $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, що збігається з одержаним результатом. При утворенні розміщень перший елемент може бути обраний $n = 5$ способами, оскільки існує можливість незалежного вибору з усіх наявних $n = 5$ елементів; а другий – $n - 1 = 4$ способами, оскільки тепер вибір проводиться з решти $n - 1 = 4$ елементів, що залишилися. За правилом добутку маємо всього $5 \cdot 4 = 20$ різних комбінацій. ■

Формулу для числа розміщень A_n^m можна подати у факторіальному вигляді $\boxed{A_n^m = n!/(n-m)!}$. Основні властивості розміщень: $A_n^{m+1} = A_n^m \cdot (n-m)$; $A_n^n = P_n = n!$.

Розміщення й перестановки обов'язково враховують порядок елементів.

Сполученнями називаються комбінації з n елементів по m, які відрізняються одна від одної принаймні одним елементом ($n \geq m \geq 0$ і $m, n \in N \cup \{0\}$), при цьому порядок елементів не враховується.

З кожного сполучення з m елементами можна утворити P_m упорядкованих розміщень. Тому ***кількість сполучень*** із n елементів по m C_n^m дорівнює числу розміщень з n елементів по m, поділеному на число перестановок з m елементів: $\boxed{C_n^m = A_n^m / P_m}$. Вважають, що $C_n^0 = 1$.

Використовуючи для кількості розміщень і перестановок факторіальні співвідношення $A_n^m = n!/(n-m)!$ і $P_n = n!$, дістанемо формулу числа сполучень у вигляді $\boxed{C_n^m = n!/\big(m!(n-m)!\big)}$.

Основна властивість сполучень:

$$C_n^{n-m} = P_n / \big(P_{n-m} \cdot P_m\big) = n!/\big((n-m)!m!\big); \quad \boxed{C_n^m = C_n^{n-m}}.$$

<u>Приклад 5</u>. Множина M утворена з п'яти букв A, B, C, D і E. Скласти невпорядковані комбінації з двох букв без повторення, що відрізняються одна від одної хоча б одним елементом.

□ Маємо: $A\ B$, $A\ C$, $A\ D$, $A\ E$, $B\ C$, $B\ D$, $B\ E$, $C\ D$, $C\ E$, $D\ E$. Виходить, що число сполучень з $n=5$ елементів по $m=2$ дорівнює 10. Це число можна обчислити так:

$$C_5^2 = 5!/\big(2!(5-2)!\big)=10\,. \quad ■$$

<u>Приклад 6</u>. Зі скриньки, в якій знаходяться ретельно перемішані $n_1=8$ білих і $n_2=4$ чорних кульок, навмання виймаються $m_e=2$ кульки. Знайти ймовірності наступних подій:

а) A={вийняті кульки білі}; б) B={вийняті кульки чорні};

в) C={вийняті кульки різнокольорові}; г) D={обидві кульки білі або обидві чорні}.

□ За класичною формулою ймовірності $P(A)=m/n$, де n – загальна кількість випадків у досліді, m – число сприятливих випадків, яке для кожної з подій A, B, C і D позначимо відповідно $m(A)$, $m(B)$, $m(C)$ і $m(D)$. Загальна кількість випадків у досліді – це число сполучень з $n_e=n_1+n_2=8+4=12$ кульок по $m_e=2$, тобто $n=C_{n_e}^{m_e}=C_{12}^2=12!/\big(2!(12-2)!\big)=66$.

а) Для події A кількість сприятливих випадків $m(A)$ – це число сполучень з $n_1=8$ білих куль по $m_e=2$, тобто

$$m(A)=C_{n_1}^{m_e}=C_8^2=8!/\big(2!(8-2)!\big)=28\,.$$

Таким чином, $P(A)=m(A)/n=28/66=14/33$.

б) Для події B кількість сприятливих випадків $m(B)$ – це кількість сполучень з $n_2=4$ чорних куль по $m_e=2$, тобто

$$m(B)=C_{n_2}^{m_e}=C_4^2=4!/\big(2!(4-2)!\big)=6\,.$$

Отже, $P(B)=m(B)/n=6/66=1/11$.

в) Для події C кількість сприятливих випадків $m(C)$ визначається за правилом множення $m(C) = n_1 n_2 = 8 \cdot 4 = 32$.

Таким чином, $P(C) = m(C)/n = 32/66 = 16/33$.

г) За результатами пунктів а) і б) даного прикладу дві білі кулі можна одержати $m(A) = 28$ способами, а дві чорні – $m(B) = 6$ способами. Тоді за правилом додавання

$$m(D) = m(A) + m(B) = 28 + 6 = 34.$$

Отже, $P(D) = m(D)/n = 34/66 = 17/33$. ■

Приклад 7. У туристичній групі, в яку входять Андрій, Борис, Сергій, Денис, Едуард, Федір і Геннадій, навмання вибирають командира, його заступника і замикаючого. Знайти ймовірність події A ={Андрій – командир, Борис – його заступник}.

□ Загальна кількість випадків у досліді – це число розміщень з $n_e = 7$ туристів по $m_e = 3$, тобто $n = A_{n_e}^{m_e} = A_7^3 = 7!/(7-3)! = 210$.

Якщо командира і його заступника вибрано (Андрія і Бориса), то вибрати замикаючого можна $m(A) = n_e - 2 = 7 - 2 = 5$ способами (число сприятливих випадків для події A).

Тоді за класичною формулою ймовірності

$$P(A) = m(A)/n = 5/210 = 1/42. \quad ■$$

1.1.4. Простір подій. Операції над подіями

Подія, якій відповідає один і тільки один результат експерименту, називається ***елементарною подією***.

Множина U всіх елементарних подій, що складають повну групу несумісних подій, називається ***простором подій***.

Приклад 1. В експерименті – однократне кидання грального кубика – за простір подій можна взяти $U_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\}$, де елементарна подія ω_k означає випадіння k очок. Також можна покласти $U_2 = \{\omega_p, \omega_n\}$, де елементарна подія ω_p означає випадіння парної цифри, а ω_n – випадіння непарної цифри.

Зауваження 1. Вибір того чи іншого простору елементарних подій визначається метою досліду.

Приклад 2. Кидається симетрична монета. Звичайно вважають, що простір подій складається з двох елементів $U=\{\omega_1,\omega_2\}$, де елементарна подія ω_1 означає випадіння герба, а ω_2 – випадіння цифри. Якщо в реальному експерименті монета стане на ребро, то треба або вважати, що відповідне випробування не здійснилося, або розглядати простір подій з трьох елементів $U=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, де ω_3 означає падіння на ребро.

Довільна підмножина A простору подій U називається ***випадковою подією в просторі*** U.

Вважатимемо, що подія $A\subset U$ відбувається тоді і тільки тоді, коли випробування, якому відповідає простір U, супроводжується появою однієї з елементарних подій, що складають подію A.

Приклад 3. В експерименті – однократне кидання грального кубика – за простір подій візьмемо $U=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_6\}$, де елементарна подія ω_k означає випадіння k очок. Тоді $A=\{\omega_5\}\subset U$ – подія, що полягає у випадінні п’яти очок; $B=\{\omega_3,\omega_6\}$ – подія “випадіння числа очок, кратного трьом”; $C=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$ – подія “випадіння парного числа очок”; $D=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$ – подія “випадіння непарного числа очок”.

Подія $A=U$ (події A відповідають всі елементи з простору U) є ***достовірною***, а подія $A=\varnothing$ (події A не відповідає жодний елемент з простору U) – ***неможливою***.

Якщо A – довільна подія, то подія $\overline{A}$, складена з елементарних подій, що не входять у A, є ***протилежною*** до A.

Очевидно, $\overline{U}=\varnothing$ і $\overline{\varnothing}=U$.

Зауваження 2. Надалі у цьому пункті слово “подія” означає “подія в просторі U”.

Елементарні події, що відповідають елементам з підмножини випадкової події A, є ***сприятливими*** до цієї події.

Нехай всі елементарні події, що складають подію A, також входять і в подію B, тобто $A\subset B$. Тоді кажуть, що ***подія*** A ***тягне за собою подію*** B.

Так, у просторі U з прикладу 3 маємо $A \subset D$, тобто випадіння п'яти очок тягне за собою випадіння їх непарного числа.

З випадкових подій можна утворювати більш складні події за допомогою різних операцій. Розглянемо основні з них.

Сумою двох подій A і B називають подію (A *або* B), що полягає у появі хоча б однієї з них в одному випробуванні. Позначають $A+B$.

У прикладі 3 подія $E=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\}$, що полягає у випадінні непарного числа очок або числа очок, кратного трьом, є сумою подій B і D: $E=B+D$.

Добутком двох подій A і B називають подію (A *і* B), що полягає в їх спільній появі в одному випробуванні. Позначають $A \cdot B$ чи AB.

У прикладі 3 подія $F=\{\omega_6\}$, що полягає у випадінні шести очок, є добутком подій B і C: $F=BC$.

Суму і добуток більше двох подій визначають за математичною індукцією.

Сумою декількох подій є подія, що полягає в появі в одному випробуванні принаймні однієї з подій-доданків.

Добутком декількох подій є подія, що полягає в спільній появі в одному випробуванні всіх подій-співмножників.

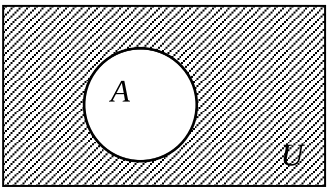


Рис. 1. $\overline{A}$

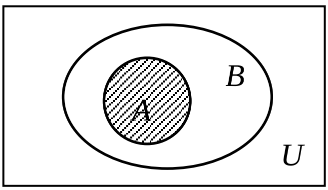


Рис. 2. $A \subset B$

Події та дії над ними можна наочно ілюструвати за допомогою ***діаграм Ейлера – Венна***, на яких достовірна подія U зображується прямокутником, елементарні події – його точками, а довільна подія – деякою областю в межах прямокутника (рис. 1 – 4).

Операції додавання і множення мають наступні властивості:

1. $A+B=B+A$,
   $AB=BA$ (комутативність);
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$,
   $(AB)C=A(BC)$ (асоціативність);
3. $(A+B)C=AC+BC$ (дистрибутив-

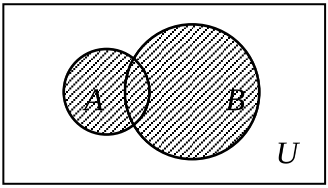


Рис. 3. $A+B$

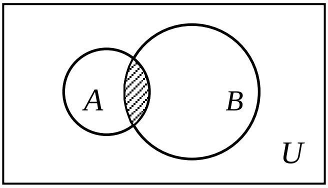


Рис. 4. AB

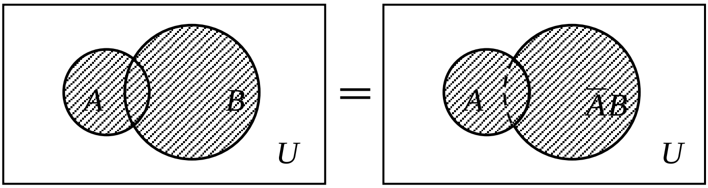
ність);

4. $A+A=A$, $AA=A$, $A+U=U$, $AU=A$, $A+\varnothing=A$, $A\varnothing=\varnothing$;
5. $A+\overline{A}=U$, $A\overline{A}=\varnothing$, $\overline{U}=\varnothing$, $\overline{\varnothing}=U$, $\overline{\overline{A}}=A$;
6. $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ (закони де Моргана).

У справедливості цих властивостей легко переконатися за допомогою діаграм Ейлера – Венна.

Приклад 4. Довести рівність, користуючись діаграмами Ейлера – Венна: $A+B=A+\overline{A}B$.

□ Маємо (рис. 5). ■



$A+B$ $\qquad$ $A+\overline{A}B$

Рис. 5. $A+B=A+\overline{A}B$

1.2. Основні теореми теорії ймовірностей

Оскільки на практиці багаторазове відтворення досліду досить затратне, то для визначення ймовірностей складних подій використовують співвідношення, що зв’язують їх з імовірностями відповідних компонент. Основні теореми теорії ймовірностей дозволяють за відомими ймовірностями простих подій визначати ймовірності більш складних подій.

1.2.1. Імовірність суми подій

<u>Теорема</u>. *Імовірність суми двох подій A і B дорівнює сумі їх імовірностей без імовірності їх добутку*:

$$\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)}.$$

□ Нехай результати досліду утворюють повну групу n несумісних рівноможливих подій (рис. 6). При цьому m з них сприятливі події A; k з них сприятливі події B; l з них сприятливі добутку AB подій A і B. Події $A+B$ сприяють $m+k-l$ випадків.

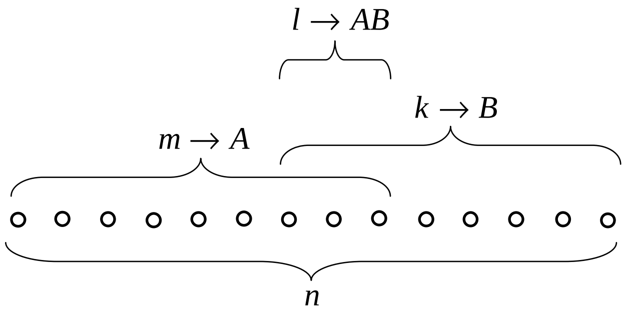


Рис. 6

Тоді за класичною формулою визначення ймовірності дістанемо:

$$P(A)=m/n; \quad P(B)=k/n; \quad P(AB)=l/n;$$

$$P(A+B)=(m+k-l)/n.$$

В останній рівності чисельник почленно розділимо на знаменник і одержимо:

$$P(A+B)=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{l}{n}=P(A)+P(B)-P(AB). \quad ■$$

<u>Наслідок 1</u>. *Імовірність суми двох несумісних подій A і B дорівнює сумі їх імовірностей*: $\boxed{P(A+B)=P(A)+P(B)}$.

Це очевидно, оскільки добуток несумісних подій є неможливою подією, а ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $AB=\varnothing$ і $P(\varnothing)=0$.

Наслідок 2. *Імовірність суми* n *попарно несумісних подій* A_1, A_2, …, A_n *дорівнює сумі їх імовірностей*:

$$\boxed{P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

Наслідок 3. *Сума ймовірностей* n *несумісних подій* A_1, A_2, …, A_n, *що складають повну групу, дорівнює одиниці*:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1}.$$

Наслідок 4. *Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці*: $\boxed{P(A) + P(\overline{A}) = 1}$.

Приклад 1. У скриньці знаходяться $n = 24$ ретельно перемішаних кульок: $n_1 = 8$ білих, $n_2 = 6$ зелених і $n_3 = 10$ червоних. Зі скриньки навмання виймається одна кулька. Знайти ймовірності того, що вийнята кулька – не біла.

□ Нехай подія A={вийнята зелена кулька}; B={вийнята червона кулька}. Тоді подія $C = A + B$={вийнята не біла кулька}.

Перший спосіб. За класичною формулою ймовірності

$$P(A) = 6/24 = 1/4; \quad P(B) = 10/24 = 5/12.$$

Оскільки події A і B несумісні, то

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = 1/4 + 5/12 = 8/12 = 2/3.$$

Другий спосіб. Нехай подія D={вийнята біла кулька}. За класичною формулою ймовірності $P(D) = 8/24 = 1/3$.

Оскільки $C = \overline{D}$, то

$$P(C) = P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 1/3 = 2/3. \ \blacksquare$$

Приклад 2. Імовірність того, що піде сніг (подія A), дорівнює 0,7, а ймовірність того, що піде дощ (подія B), дорівнює 0,4. Знайти ймовірність поганої погоди (подія $C = A + B$), якщо ймовірність дощу зі снігом (подія AB) дорівнює 0,2.

□ Події A і B сумісні, тому

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}7 + 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}9. \ \blacksquare$$

1.2.2. Імовірність добутку подій

Дві події A і B називаються ***незалежними***, якщо ймовірність появи однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася інша.

Для подій A і B ймовірність події A, обчислена за умови, що подія B вже відбулася, називається ***умовною ймовірністю*** і позначається $P_B(A)$ або $P(A/B)$.

Для незалежних подій A і B умовні ймовірності збігаються з безумовними: $P(A/B)=P(A)$ і $P(B/A)=P(B)$.

Для залежних подій A і B умовні ймовірності відрізняються від безумовних: $P(A/B)\neq P(A)$ і $P(B/A)\neq P(B)$.

Приклад 1. Симетричну монету кидають двічі. Розглянемо події: A={першого разу випав герб}, B={другого разу випав герб} і C={за два рази випав принаймні один герб}. Треба визначити, які з пар подій A і B, A і C, B і C є незалежними.

□ За простір подій візьмемо $U=\{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, де $Г$ означає випадіння герба, а $Ц$ – випадіння цифри. Тоді $A=\{ГГ, ГЦ\}$; $B=\{ГГ, ЦГ\}$ і $C=\{ГГ, ГЦ, ЦГ\}$.

Користуючись класичною формулою, обчислимо безумовні та умовні ймовірності:

$$P(A)=2/4=1/2;\quad P(B)=2/4=1/2;\quad P(C)=3/4;$$

$$P(B/A)=1/2;\quad P(C/A)=2/2=1;\quad P(B/C)=2/3.$$

Таким чином, події A і B незалежні, оскільки $P(B/A)=1/2=P(B)$; події A і C залежні, тому що $P(C/A)=1\neq 3/4=P(C)$; B і C залежні, оскільки $P(B/C)=2/3\neq 1/2=P(B)$. ■

Теорема. *Імовірність добутку двох подій A і B дорівнює добутку ймовірності однієї з них на умовну ймовірність іншої, обчислену за умови, що перша вже відбулася*:

$$\boxed{P(AB)=P(A)\cdot P(B/A)} \text{ і } \boxed{P(AB)=P(B)\cdot P(A/B)}.$$

□ Нехай результати досліду утворюють повну групу n несумісних рівноможливих подій (рис. 6). З цих випадків m сприятливі події A; k – події B; l – добутку AB. Тоді за класичною формулою:

$$P(A) = m/n; \quad P(B/A) = l/m; \quad P(AB) = l/n.$$

Останню рівність можна перетворити так:

$$P(AB) = \frac{l}{n} \cdot \frac{m}{m} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m} = P(A) \cdot P(B/A). \quad \blacksquare$$

Ця теорема узагальнюється на добуток будь-якої кількості подій:

$$P(A_1 A_2 A_3 ... A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / A_1 A_2) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1 A_2 ... A_{n-1}).$$

<u>Наслідок 1</u>. *Імовірність добутку двох незалежних подій* A *і* B *дорівнює добутку їх імовірностей*: $\boxed{P(AB) = P(A) \cdot P(B)}$.

Це пояснюється тим, що для незалежних подій умовні ймовірності збігаються з безумовними.

Події A_1, A_2, ..., A_n $(n \geq 2)$ називаються ***взаємно незалежними*** (***незалежними у сукупності***), якщо при $n = 2$ вони незалежні, а при $n \geq 3$ кожна з них не залежить від добутку будь-яких з решти подій.

<u>Наслідок 2</u>. *Імовірність добутку* n *взаємно незалежних подій* A_1, A_2, ..., A_n *дорівнює добутку їх імовірностей*:

$$\boxed{P\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i)}.$$

<u>Зауваження 1</u>. З попарної незалежності подій A_1, A_2, ..., A_n ($n \geq 3$) не випливає їх незалежність у сукупності.

<u>Приклад 2</u>. Нехай всі чотири грані тетраедра пофарбовані так: перша – у зелений колір, друга – у синій, третя – у червоний, четверта – у всі ці три кольори. При киданні тетраедр падає на одну з граней, на якій є зелений (подія A), синій (подія B), червоний (подія C) чи всі три кольори (подія $D = ABC$). Чи є взаємно незалежними події A, B і C?

□ Обчислимо відповідні ймовірності:

$$P(A)=P(B)=P(C)=2/4=1/2\,;\quad P(A/B)=P(A/C)=$$
$$=P(B/A)=P(B/C)=P(C/A)=P(C/B)=1/2\,.$$

Оскільки значення знайдених умовних та безумовних ймовірностей співпадають, то події A, B і C попарно незалежні. Але, наприклад, $P(A/BC)=1$, тому $P(A/BC)\neq P(A)$. Це означає, що події A, B і C не є взаємно незалежними. ■

Зауваження 2. Якщо події A_1, A_2, ..., A_n $(n\geq 2)$ взаємно незалежні, то протилежні ім. події $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, ..., $\overline{A}_n$ також взаємно незалежні.

Приклад 3. У комп'ютерну тестову систему введено 40 запитань. Студенту випадковим чином пропонується 5 запитань і виставляється за тест оцінка "відмінно", якщо на всі запитання він дає правильну відповідь. Знайти ймовірність одержати таку оцінку, якщо з усіх введених в систему запитань студент підготував тільки 30.

□ Розглянемо події A={одержана оцінка "відмінно"} та A_i={дана правильна відповідь на i-е запитання}, $i=\overline{1,5}$. Тоді $A=A_1A_2A_3A_4A_5$. Події A_i, $i=\overline{1,5}$ залежні, тому

$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4A_5)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\times$$
$$\times P(A_4/A_1A_2A_3)\cdot P(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{30}{40}\cdot\frac{29}{39}\cdot\frac{28}{38}\cdot\frac{27}{37}\cdot\frac{26}{36}\approx 0{,}22\,.$$ ■

Приклад 4. Два мисливця роблять по одному пострілу в ціль. Імовірність влучення в ціль для першого мисливця дорівнює 0,75, а для другого – 0,9. Знайти ймовірність того, що:

а) обидва мисливця влучили в ціль;

б) принаймні один мисливець влучив у ціль.

□ Розглянемо події A={перший мисливець влучив у ціль}; B={другий мисливець влучив у ціль}; $C=AB$={обидва мисливця влучили в ціль} і $D=A+B$={принаймні один мисливець влучив у ціль}. За умовою $P(A)=0{,}75$ і $P(B)=0{,}9$.

а) Події A і B незалежні, тому

$$P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}75\cdot 0{,}9=0{,}675\,.$$

б) Події A і B сумісні. Імовірність їх суми $D = A + B$ знайдемо трьома способами. Попередньо розглянемо протилежні події $\overline{A}$, $\overline{B}$ і знайдемо їх імовірності:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25; \quad P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

<u>Перший спосіб</u>. Подамо подію $D = A + B$ як суму несумісних подій $D = A\overline{B} + \overline{A}B + AB$. Тоді

$$P(D) = P(A\overline{B} + \overline{A}B + AB) = P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) + P(AB) =$$

$$= P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) + P(A) \cdot P(B) =$$

$$= 0{,}75 \cdot 0{,}1 + 0{,}25 \cdot 0{,}9 + 0{,}75 \cdot 0{,}9 = 0{,}975.$$

<u>Другий спосіб</u>. Розглянемо протилежну подію $\overline{D}$ ={обидва мисливця не влучили в ціль}. Тоді $\overline{D} = \overline{A}\,\overline{B}$, де події $\overline{A}$ і $\overline{B}$ незалежні. Дістанемо:

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) = 0{,}25 \cdot 0{,}1 = 0{,}025;$$

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}975.$$

<u>Третій спосіб</u>. Знайдемо ймовірність події $D = A + B$ безпосередньо як суму сумісних подій:

$$P(D) = P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) =$$

$$= 0{,}75 + 0{,}9 - 0{,}75 \cdot 0{,}9 = 0{,}975. \quad \blacksquare$$

<u>Приклад 5</u>. Імовірності влучення в ціль при пострілах з трьох гармат відповідно дорівнюють $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}7$ і $p_3 = 0{,}85$. Знайти ймовірність хоча б одного влучення (подія A) при одному залпі з усіх цих гармат.

□ Імовірність влучення в ціль кожної з гармат не залежить від результатів стрільби з інших гармат. Тому події A_i ={ i -а гармата влучила в ціль}, $i = 1, 2, 3$ незалежні в сукупності.

Імовірності q_i, $i = 1, 2, 3$ протилежних подій $\overline{A_i}$, $i = 1, 2, 3$ (промахів) відповідно дорівнюють:

$$q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2; \qquad q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;$$

$$q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15\,.$$

Тоді ймовірність події $\overline{A} = \overline{A}_i\overline{A}_i\overline{A}_i$ ={жодна з трьох гармат не влучила в ціль} визначається так:

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A}_1)\,P(\overline{A}_2)\,P(\overline{A}_3) = q_1 q_2 q_3 = 0{,}2\cdot 0{,}3\cdot 0{,}15 = 0{,}009\,.$$

Таким чином, шукана ймовірність

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}009 = 0{,}991\,. \quad \blacksquare$$

1.2.3. Формули повної ймовірності та Байєса

Нехай передбачається проведення досліду, щодо умов виконання якого можна зробити n взаємовиключних ***припущень*** (***гіпотез***) H_1, H_2, ..., H_n. Гіпотези про умови протікання експерименту утворюють повну групу несумісних подій $U = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$, ***апріорні*** (додослідні) ймовірності кожної з яких $P(H_i)$, $i = \overline{1,n}$ відомі. Деяка випадкова подія A може відбутися при будь-якій з наведених умов виконання досліду, що визначаються гіпотезами H_i, $i = \overline{1,n}$, з відомими відповідними умовними ймовірностями $P(A/H_i)$, $i = \overline{1,n}$. Формула повної ймовірності $P(A)$ використовується для визначення повної (середньої) ймовірності події A, що може відбутися тільки з однією з повної групи несумісних подій H_i, $i = \overline{1,n}$.

Події H_i, $i = \overline{1,n}$ прийнято називати ***гіпотезами***, оскільки повна ймовірність $P(A)$ події A визначається в момент, коли невідомо, яка з подій H_i, $i = \overline{1,n}$ відбудеться і спричинить настання події A.

Складну подію A можна подати як суму несумісних подій (рис. 7, де події A відповідають точки, обмежені овалом, а гіпотезам H_i, $i = \overline{1,n}$ – точки відповідних трикутників, $n = 5$):

$$A = H_1A + H_2A + ... + H_nA = \sum\nolimits_{i=1}^{n} H_iA\,.$$

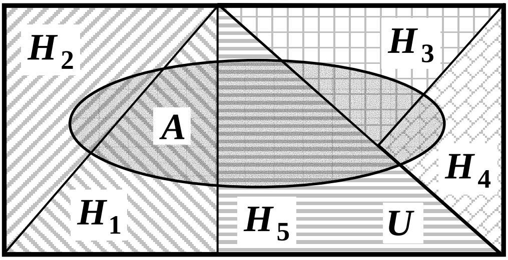


Рис. 7

Застосовуючи теореми додавання й множення, дістанемо:

$$P(A) = P(H_1A + H_2A + \ldots + H_nA) =$$

$$= P(H_1A) + P(H_2A) + \ldots + P(H_nA) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) +$$

$$+ P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \ldots + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Таким чином, маємо ***формулу повної ймовірності***

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A/H_i)}.$$

Повна безумовна ймовірність події A *з урахуванням випадковості умов виконання експерименту дорівнює сумі добутків імовірностей кожної з гіпотез на умовну ймовірність події* A *при кожній з гіпотез.*

Приклад 1. У продаж надходять телевізори трьох заводів: 30% з першого, 50% з другого і 20% з третього. Продукція першого заводу містить 10% телевізорів з прихованими дефектами, другого – 5% і третього – 4%. Знайти ймовірність придбати справний телевізор.

□ Розглянемо подію A={придбано справний телевізор} і гіпотези H_i={телевізор надійшов у продаж з i-го заводу}, $i=\overline{1,3}$.

З умови задачі маємо:

$$P(H_1) = 30\% = 0{,}3; \quad P(H_2) = 50\% = 0{,}5; \quad P(H_3) = 20\% = 0{,}2;$$

$$P(A/H_1) = 100\% - 10\% = 90\% = 0{,}9; \quad P(A/H_2) = 100\% - 5\% =$$

$$= 95\% = 0{,}95\,; \quad P(A/H_3) = 100\% - 4\% = 96\% = 0{,}96\,.$$

Тоді за формулою повної ймовірності дістаємо:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$

$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0{,}3\cdot 0{,}9 + 0{,}5\cdot 0{,}96 + 0{,}2\cdot 0{,}95 = 0{,}94\,. \quad \blacksquare$$

Формула Байєса використовується при тих же передумовах, що і формула повної ймовірності, за єдиної відмінності, що подія A вже відбулася. Вона дозволяє визначати ***апостеріорні*** (післядослідні) ймовірності гіпотез $P(H_i/A)$, $i=\overline{1,n}$, тобто умовні ймовірності гіпотез за умови, що подія A відбулася.

За теоремою про ймовірність добутку двох подій для кожного $i=\overline{1,n}$ визначимо у двох формах ймовірність спільної появи подій H_i і A в одному випробуванні:

$$P(H_iA) = P(H_i)\cdot P(A/H_i) \quad \text{або} \quad P(H_iA) = P(A)\cdot P(H_i/A)\,.$$

Звідси дістанемо

$$P(H_i)\cdot P(A/H_i) = P(A)\cdot P(H_i/A)\,;$$

$$P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i) \big/ P(A)\,.$$

У знаменник останнього співвідношення замість повної ймовірності $P(A)$ підставимо її вираз за формулою повної ймовірності й отримаємо ***формулу Байєса*** (***формулу гіпотез***)

$$\boxed{P(H_i/A) = P(H_i)\cdot P(A/H_i) \Big/ \sum\nolimits_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)\,,\ i=\overline{1,n}}\,.$$

Таким чином, формула Байєса дозволяє переоцінити ймовірності гіпотез після того, як стає відомим, що в результаті випробування відбулася подія A. Використовуючи інформацію про факт появи події, ця формула забезпечує корекцію апріорних імовірностей гіпотез, що дозволяє більш обґрунтовано судити про умови, що передували цій події.

<u>Приклад 2</u>. Статистика запитів кредитів в деякому банку така: 20% – бюджетні організації, 36% – юридичні особи, а решта – фізичні особи. Імовірності неповернення взятого кредиту відповідно дорівнюють 0,01, 0,05 і 0,2. Знайти ймовірність неповернення

чергового кредиту. Начальнику кредитного відділу надійшло повідомлення факсом про неповернення кредиту, але в ньому ім'я клієнта погано надруковано. Яка ймовірність, що цей кредит не повернула юридична особа?

□ Розглянемо подію A={неповернення кредиту} і гіпотези H_1={запит на кредит від бюджетної організації}, H_2={запит на кредит від юридичної особи}, H_3={запит на кредит від фізичної особи}. З умови задачі маємо:

$$P(H_1) = 20\% = 0{,}2; \qquad P(H_2) = 36\% = 0{,}36;$$

$$P(H_3) = 100\% - 20\% - 36\% = 44\% = 0{,}44;$$

$$P(A/H_1) = 0{,}01; \quad P(A/H_2) = 0{,}05; \quad P(A/H_3) = 0{,}2.$$

Імовірність неповернення кредиту знайдемо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A/H_1) + P(H_2)\cdot P(A/H_2) +$$

$$+ P(H_3)\cdot P(A/H_3) = 0{,}2\cdot 0{,}01 + 0{,}36\cdot 0{,}05 + 0{,}44\cdot 0{,}2 = 0{,}108.$$

Імовірність, що кредит не повернула юридична особа, обчислимо за формулою Байєса:

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)\cdot P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}36\cdot 0{,}05}{0{,}108} \approx 0{,}167. \quad \blacksquare$$

1.3. Схема незалежних випробувань

На практиці часто доводиться стикатися з задачами, де потрібно обчислювати ймовірності складних подій при фіксованому числі незалежних випробувань і відомою ймовірністю настання деякої більш простої події A в кожному випробуванні.

Якщо проводиться n випробувань, причому ймовірність появи події A в кожному випробуванні не залежить від результатів інших випробувань, то такі випробування називаються ***незалежними*** відносно події A.

Усі задачі, пов'язані з повторенням незалежних експериментів, можуть бути розв'язані безпосередньо за допомогою основних теорем теорії ймовірностей. Проте при великому числі випробувань це призводить до складних і громіздких обчислень. Тому для типових задач –

- визначення ймовірності $P_n(m)$ настання події A рівно m разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше m_1 і не більше m_2 разів у n незалежних випробуваннях;
- визначення найімовірнішого числа m_0 настання події A в n незалежних випробуваннях

– розроблені спеціальні співвідношення, що наведені далі.

1.3.1. Біноміальний експеримент. Формула Бернуллі

Біноміальний експеримент є серією незалежних випробувань, у кожному з яких можливий тільки один з двох протилежних результатів – подія A відбулася (***успіх***) чи не відбулася (***невдача***) $\overline{A}$.

Приклад 1. Біноміальними є такі експерименти: 1) постріли в ціль –влучення чи не влучення у ціль; 2) контроль якості деталей – деталь бракована чи стандартна.

Біноміальний експеримент відповідає ***схемі Бернуллі***, якщо виконуються наступні умови: 1) число незалежних випробувань n фіксоване; 2) ймовірність успіху p (невдачі $q = 1 - p$) однакова у кожному випробуванні.

Зауваження 1. Далі обмежимося розглядом біноміального експерименту за схемою Бернуллі.

Нехай складна подія S полягає у тому, що при n випробуваннях у певних m з них подія A відбулася, а в решті $m - n$ – не відбулася. За теоремою множення ймовірностей, враховуючи незалежність настання чи ненастання події A при кожному випробуванні, дістанемо

$$P(S) = \underbrace{p \cdot p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{m} \cdot \underbrace{q \cdot q \cdot \ldots \cdot q}_{n-m} = p^m q^{n-m}.$$

Такого роду подій S є стільки, скільки можна скласти сполучень з n елементів по m у кожному. Враховуючи, що всі ці складні події несумісні та мають однакову ймовірність $P(S)=p^m q^{n-m}$, за теоремою додавання ймовірностей одержимо:

ймовірність $P_n(m)$ події, що при n випробуваннях у m з них, не враховуючи порядку, подія A відбулася, а в решті $m-n$ – не відбулася, визначається за формулою

$$P_n(m)=C_n^m\,P(S) \quad \textit{або} \quad \boxed{P_n(m)=C_n^m\,p^m q^{n-m}}.$$

Останнє співвідношення називається ***формулою Бернуллі***.

Зауваження 2. Права частина формули Бернуллі служить загальним членом розвинення бінома Ньютона:

$$(p+q)^n=\sum\nolimits_{m=0}^{n} C_n^m\,p^m q^{n-m}\,.$$

Зауваження 3. Імовірності $P_n(m)$ для $m=0,1,2,\ldots$ можна обчислювати послідовно за рекурентним співвідношенням:

$$\boxed{P_n(m+1)=\frac{(n-m)\,p}{(m+1)\,q}\,P_n(m)}.$$

Приклад 2. На контроль надійшла партія телевізорів. Імовірність непридатності кожного з них $p=0{,}1$. Скільки телевізорів n треба перевірити, щоб з імовірністю $P=0{,}95$ виявити принаймні один бракований телевізор?

□ За умовою $p=0{,}1$. Тоді ймовірність придатності кожного телевізору $q=1-p=1-0{,}1=0{,}9$, а ймовірність придатності всіх телевізорів $P_n(0)=C_n^0 p^0 q^{n-0}=q^n=0{,}9^n$. Звідси ймовірність протилежної події – принаймні один телевізор виявиться бракованим, (серед n перевірених телевізорів не менше $m_1=1$ і не більше $m_2=n$ виявляться непридатними) – визначається рівністю

$$P_n(1,n)=1-P_n(0)=1-0{,}9^n\,.$$

За умовою ця ймовірність $P_n(1,n)$ повинна бути не менше $P=0{,}95$. Звідси

$$1-0{,}9^n\ge 0{,}95\,;\quad 0{,}9^n\le 0{,}05\,;\quad n\lg 0{,}9\le \lg 0{,}05\,;$$

$$n \geq \lg 0{,}05/\lg 0{,}9 \approx 28{,}4\,.$$

Оскільки шукане число n – натуральне, то можна покласти $n = 29$. ■

Виходячи з формули Бернуллі, за теоремою додавання ймовірностей дістанемо співвідношення для визначення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше m_1 і не більше m_2 разів у n незалежних випробуваннях:

$$\boxed{P_n(m_1, m_2) = \sum\nolimits_{m=m_1}^{m_2} P_n(m) = \sum\nolimits_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}}.$$

Приклад 3. Контрольна робота у тестовій формі складається з $n = 5$ запитань, на кожне з яких пропонується $k = 4$ варіантів відповіді. Студент не підготувався і відповідає навмання. Яка ймовірність, що студент дасть правильні відповіді принаймні на три запитання?

□ Розглянемо подію A={надання правильної відповіді}. Імовірність її настання $p = 1/k = 1/4$ і ненастання $q = 1 - p = 1 - 1/4 = 3/4$. Тоді ймовірність $P(B)$ події B={надання правильної відповіді принаймні на три запитання з $n = 5$ запитань} обчислюється як ймовірність $P_n(m_1, m_2)$ настання події A не менше $m_1 = 3$ і не більше $m_2 = 5$ разів у $n = 5$ незалежних випробуваннях у вигляді суми ймовірностей $P_n(m)$, $m = 3, 4, 5$ трьох несумісних подій B_m={надання правильної відповіді рівно на m запитань з $n = 5$ }, $m = 3, 4, 5$:

$$P(B) = P_n(3,5) = P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = P_5(3) + P_5(4) +$$
$$+ P_5(5) = C_5^3 (1/4)^3 (3/4)^{5-3} + C_5^4 (1/4)^4 (3/4)^{5-4} +$$
$$+ C_5^5 (1/4)^5 (3/4)^{5-5} \approx 0{,}088 + 0{,}015 + 0{,}001 \approx 0{,}10\,. \quad ■$$

Найімовірнішим числом появи події A в n незалежних випробуваннях називається таке ціле невід'ємне число $m = m_0$, для якого ймовірність $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ досягає свого найбільшого значення.

Оскільки $P_n(m_0) = \max\limits_{0 \le m \le n} P_n(m)$, то

1) $P_n(m_0 - 1) \le P_n(m_0) = \dfrac{(n - (m_0 - 1))p}{(m_0 - 1 + 1)q} P_n(m_0 - 1)$, звідки

$$1 \le \frac{(n - m_0 + 1)p}{m_0(1 - p)};\ \ m_0(1 - p) \le (n - m_0 + 1)p;\ m_0 \le p(n + 1);$$

2) $P_n(m_0) \ge P_n(m_0 + 1) = \dfrac{(n - m_0)p}{(m_0 + 1)q} P_n(m_0)$, звідки

$$1 \ge \frac{(n - m_0)p}{(m_0 + 1)(1 - p)};\ (m_0 + 1)(1 - p) \ge (n - m_0)p;\ m_0 \ge p(n + 1) - 1.$$

Отже, для визначення найімовірнішого числа m_0 одержуємо подвійну нерівність $\boxed{p(n + 1) - 1 \le m_0 \le p(n + 1)}$.

Зауваження 4. Оскільки відрізок $[p(n + 1) - 1;\ p(n + 1)]$ має одиничну довжину, то на ньому може знаходитися або тільки одне ціле число m_0 всередині, або два цілих числа m_{01} і $m_{02} = m_{01} + 1$ на його кінцях.

Приклад 4. У відділ комплектації від кожної з $n = 12$ бригад електромонтажників щодня з імовірністю $p = 0{,}6$ надходить заявка на витратні матеріали. Знайти найімовірніше число m_0 заявок за день та ймовірність $P_n(m_0)$ надходження цього числа заявок.

□ Найімовірніше число m_0 заявок знайдемо з подвійної нерівності $p(n + 1) - 1 \le m_0 \le p(n + 1)$:

$$0{,}6 \cdot (12 + 1) - 1 \le m_0 \le 0{,}6 \cdot (12 + 1);\ \ 6{,}2 \le m_0 \le 7{,}2;\ \ m_0 = 7.$$

З умови задачі маємо $q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Обчислимо ймовірність $P_n(m_0)$ надходження $m_0 = 7$ заявок:

$$P_{12}(7) = C_{12}^7 \cdot 0{,}6^7 \cdot 0{,}4^{12-7} \approx 0{,}23.\ \ ■$$

Приклад 5. Контролер розглядає $n = 49$ зразків деякого товару, призначеного для продажу. Для кожного зразка ймовірність p

того, що він буде допущений до продажу, однакова і дорівнює $0{,}8$. Знайти найімовірніше число m_0 зразків цього товару, що будуть допущені до продажу.

□ Найімовірніше число m_0 заявок знайдемо з подвійної нерівності $p(n+1)-1 \le m_0 \le p(n+1)$:

$$0{,}8\cdot(49+1)-1 \le m_0 \le 0{,}8\cdot(49+1); \qquad 39 \le m_0 \le 40;$$

$$m_{01}=39; \qquad m_{02}=40. \quad ■$$

1.3.2. Локальна й інтегральна формули Лапласа

Не зважаючи на простий вигляд формули Бернуллі, знаходити за нею біноміальні ймовірності $P_n(m)$ при великих значеннях n дуже складно через наявність у формулі числа сполучень, що вимагає трудомістких обчислень факторіалів. Формулу Бернуллі та одержане на її основі співвідношення для $P_n(m_1,m_2)$ рекомендується використовувати при числі випробувань $n<100$. При $n \ge 100$ краще уникнути зазначених обчислень, замінюючи ймовірності $P_n(m)$ і $P_n(m_1,m_2)$ їх наближеними оцінками.

Нехай кількість випробувань n велика ($n \ge 100$), а ймовірності p і q не малі ($npq \ge 15$), так що виконуються умови:

$$np-3\sqrt{npq}>0; \qquad np+3\sqrt{npq}<n.$$

Тоді справедливі наступні наближені співвідношення:

1) ***локальна формула Лапласа*** $\boxed{P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)}$;

2) ***інтегральна формула Лапласа*** $\boxed{P_n(m_1,m_2) \approx \Phi(x_2)-\Phi(x_1)}$.

У наведених формулах

$\boxed{\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}}$ – ***функція Гаусса***; $\boxed{\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2/2}du}$

– ***функція Лапласа***; $\boxed{x = \dfrac{m-np}{\sqrt{npq}}}$; $\boxed{x_1 = \dfrac{m_1-np}{\sqrt{npq}}}$; $\boxed{x_2 = \dfrac{m_2-np}{\sqrt{npq}}}$.

<u>Зауваження 1</u>. Відносні похибки формул Лапласа швидко прямують до нуля з необмеженим зростанням n. При фіксованому n ці формули забезпечують тим точніші результати, чим ближче число p до $1/2$.

Для функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$ наявні готові довідкові таблиці значень і обчислювальні комп'ютерні процедури. Графіки цих функцій зображені відповідно на рис. 8 і рис. 9.

<u>Зауваження 2</u>. Зазначимо, що $\Phi(x) = \int\limits_0^x \varphi(u)du$; $\Phi'(x) = \varphi(x)$.

<u>Зауваження 3</u>. Користуючись довідковими таблицями значень функцій $\varphi(x)$ і $\Phi(x)$, треба враховувати, що:

а) функція $\varphi(x)$ – парна, тобто $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

б) функція $\Phi(x)$ – непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$;

в) при $x \le -4$ можна вважати, що $\varphi(x) = 0$ і $\Phi(x) = -0{,}5$;

г) при $x \ge 4$ можна вважати, що $\varphi(x) = 0$ і $\Phi(x) = 0{,}5$.

<u>Приклад 1</u>. Для кожної з деталей, що надходять у складальний цех, імовірність виявитися бракованою p стала й дорівнює $0{,}01$. Яка ймовірність $P_n(m)$, що в партії з $n = 2000$ деталей бракованих буде рівно $m = 12$.

□ За умовою $p = 0{,}01$, $n = 2000 \ge 100$. Тоді

$$q = 1 - p = 0{,}99;\ np = 20;\ npq = 19{,}8 \ge 15;\ \sqrt{npq} \approx 4{,}450;$$

$$np - 3\sqrt{npq} \approx 6{,}650 > 0;\ np + 3\sqrt{npq} \approx 33{,}350 < n = 2000.$$

Одержані нерівності показують, що для обчислення ймовірності $P_n(m)$ можна застосувати локальну формулу Лапласа:

$$x = (m-np)\big/\sqrt{npq} \approx (12-20)/4{,}450 \approx -1{,}798;$$

$$\varphi(-1{,}798) = \varphi(1{,}798) \approx 0{,}0792;$$

$$P_n(m) \approx \varphi(x) \big/ \sqrt{npq} \approx 0{,}0792 / 4{,}450 \approx 0{,}018 . \quad \blacksquare$$

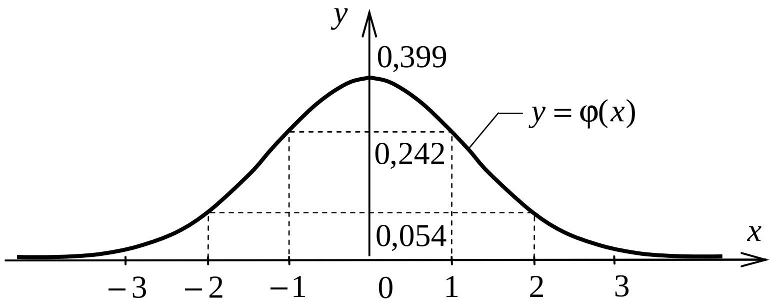


Рис. 8

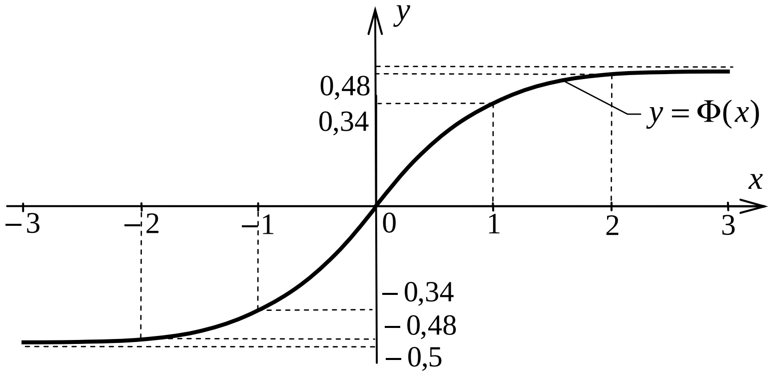


Рис. 9

Приклад 2. Імовірність p події A, що навмання взята зі складу деталь не пройшла перевірку відділом технічного контролю (ВТК), стала й дорівнює $0{,}03$. Знайти ймовірність $P_n(m_1, m_2)$, що серед $n = 600$ випадково відібраних зі складу деталей виявляться неперевіреними ВТК від $m_1 = 15$ до $m_2 = 30$ штук.

□ За умовою $p = 0{,}03$, $n = 600 \geq 100$. Тоді

$$q = 1 - p = 0{,}97 ; \; np = 18 ; \; npq = 17{,}46 \geq 15 ; \; \sqrt{npq} \approx 4{,}179 ;$$

$$np - 3\sqrt{npq} \approx 5{,}463 > 0 ; \; np + 3\sqrt{npq} \approx 30{,}537 < n = 600 .$$

Оскільки необхідні передумови справджуються, то для обчислення ймовірності $P_n(m)$ можна застосувати інтегральну формулу Лапласа:

$$x_1 = (m_1 - np)\big/\sqrt{npq} \approx (15-18)/4{,}179 \approx -0{,}718;$$

$$x_2 = (m_2 - np)\big/\sqrt{npq} \approx (30-18)/4{,}179 \approx 2{,}872;$$

$$\Phi(x_1) = \Phi(-0{,}718) = -\Phi(0{,}718) \approx -0{,}2636;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(2{,}872) \approx 0{,}4980;$$

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \approx 0{,}4980 + 0{,}2636 \approx 0{,}762. \quad \blacksquare$$

Зауваження 4. Нехай за серією з n незалежних випробувань за схемою Бернуллі подія A, ймовірність появи якої p, характеризується відносною частотою $W_n(A)$. Для ймовірності того, що відхилення відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності p за модулем не перевищує заданого додатного числа ε, справджується наближена оцінка

$$\boxed{P\left(|W_n(A) - p| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right)}, \text{ де } q = 1 - p.$$

Приклад 3. Імовірність p події A, що навмання взята деталь бракована, дорівнює $0{,}1$. Знайти ймовірність того, що для випадково відібраних $n = 256$ деталей відносна частота $W_n(A)$ появи серед них бракованих відхиляється від ймовірності p за абсолютною величиною не більш, ніж на $\varepsilon = 0{,}03$.

□ За умовою $p = 0{,}1$, $n = 256$, $\varepsilon = 0{,}03$, $q = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

Тоді $$P\left(|W_n(A) - 0{,}1| \le 0{,}03\right) \approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{256/(0{,}1\cdot 0{,}9)}\right) =$$

$$= 2\Phi(1{,}6) = 2 \cdot 0{,}44520 \approx 0{,}89.$$

Одержаний результат можна тлумачити так: якщо взяти достатньо велику кількість проб по $n = 256$ деталей у кожній, то приблизно в 89% цих проб відхилення відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності $p = 0{,}1$ за модулем не перевищить заданого числа $\varepsilon = 0{,}03$. $\blacksquare$

1.3.3. Формула Пуассона

Якщо ймовірність p настання події A в кожному з n випробувань близька до нуля (тобто, у випадку ***рідкісних*** подій), то навіть при великому n, але при малому значенні добутку np, застосування наближених формул Лапласа призводить до суттєвих похибок.

Для обчислення ймовірності $P_n(m)$, коли кількість випробувань n досить велика ($n \geq 1000$), а ймовірність p мала ($p < 0{,}1$), так що виконуються умови:

$$p << 1/\sqrt{n}\,; \qquad a = np \leq 10\,; \qquad |\,m - a\,| \leq 10\,,$$

застосовується наближена ***формула Пуассона*** $\boxed{P_n(m) \approx a^m e^{-a}/m!}$, де $\boxed{a = np}$.

Для ***функції Пуассона*** $P(a,m) = a^m e^{-a}/m!$ наявні готові довідкові таблиці значень і обчислювальні комп'ютерні процедури.

При тих же припущеннях, що й для формули Пуассона, і малій різниці $m_2 - m_1$ для обчислення ймовірності $P_n(m_1, m_2)$ застосовується наближена формула $\boxed{P_n(m_1, m_2) \approx e^{-a} \sum_{m=m_1}^{m_2} a^m/m!}$.

Зауваження. Підкреслимо, що наведені співвідношення використовуються у випадку масових (n досить велике) і рідкісних (p мале) подій, коли добуток $a = np$ зберігає приблизно стале значення для різних серій випробувань (тобто середнє число $a = np$ появ події A у різних серіях випробувань залишається майже незмінним). Формула Пуассона широко застосовуються в теорії масового обслуговування та в теорії надійності, де a – інтенсивність відмов.

Приклад 1. Імовірність p допустити помилку при наборі на клавіатурі деякого тексту, що містить $n = 1200$ знаків, дорівнює $0{,}005$. Знайти найімовірніше число m_0 зроблених помилок і його ймовірність $P_n(m_0)$.

□ Спочатку знайдемо найімовірніше число m_0 помилок:

$$p(n+1) - 1 \leq m_0 \leq p(n+1)\,; \quad 0{,}005 \cdot (1200+1) - 1 \leq m_0 \leq$$

$$\le 0{,}005 \cdot (1200+1)\,; \;\; 5{,}005 \le m_0 \le 6{,}005\,; \;\; m_0 = 6\,.$$

За умовою $p = 0{,}005 < 0{,}1$, $n = 1200 \ge 1000$. Тоді

$$p = 0{,}005 << 1\big/\sqrt{n} \approx 0{,}03\,; \;\; a = np = 6 \le 10\,; \;\; |\, m_0 - a\,| = 0 \le 10\,.$$

Оскільки необхідні припущення для застосування формули Пуассона справджуються, то для ймовірності $P_n(m_0)$ одержимо наближену оцінку:

$$P_n(m_0) \approx a^{m_0} e^{-a} \big/ m_0! \approx 6^6 e^{-6} \big/ 6! \approx 0{,}161. \;\; ■$$

<u>Приклад 2</u>. З підприємства на базу відправлено $n = 8000$ справних виробів. Для кожного виробу ймовірність p його пошкодження при транспортуванні до бази дорівнює $0{,}0003$. Знайти ймовірність $P_n(4, n)$, що на базу надійде більше трьох пошкоджених виробів.

□ Спочатку знайдемо ймовірність $P_n(0, 3)$ протилежної події, що на базу надійде не більше трьох пошкоджених виробів.

За умовою

$$p = 0{,}0003 < 0{,}1\,, \;\; n = 8000 \ge 1000\,, \; m_1 = 0\,, \; m_2 = 3\,.$$

Тоді

$$p = 0{,}0003 << 1\big/\sqrt{n} \approx 0{,}01\,; \;\; a = np = 2{,}4 \le 10\,;$$

$$|\, m_1 - a\,| = |\, 0 - 2{,}4\,| \le 10\,; \;\; |\, m_2 - a\,| = |\, 3 - 2{,}4\,| \le 10\,.$$

Таким чином, необхідні передумови справджуються, тому для обчислення ймовірності $P_n(0, 3)$ можна застосувати співвідношення $P_n(m_1, m_2) \approx e^{-a} \sum_{m=m_1}^{m_2} a^m \big/ m!$, що випливає з формули Пуассона. Дістанемо:

$$P_n(0{,}3) \approx e^{-2{,}4}\left(2{,}4^0 \big/ 0! + 2{,}4^1 \big/ 1! + 2{,}4^2 \big/ 2! + 2{,}4^3 \big/ 3!\right) \approx 0{,}7787\,.$$

Тоді $P_n(4, n) = 1 - P_n(0{,}3) \approx 1 - 0{,}7787 \approx 0{,}221.$ ■

1.4. Випадкові величини та їх закони розподілу

1.4.1. Основні поняття про випадкові величини

Випадковою називають величину, що в результаті випробування може прийняти те або інше наперед невідоме значення.

Випадкову величину позначають прописною літерою латинського алфавіту $...,U,V,X,Y,Z$, а будь-яке її значення – відповідною малою літерою $...,u,v,x,y,z$. Множину всіх можливих значень випадкової величини називають її ***спектром***.

Приклад 1. Випадкова величина X – порядковий номер дня народження (у відповідному році народження) навмання вибраного працівника деякого підприємства. Ця величина X приймає заздалегідь невідомі натуральні значення x з діапазону $[1;366]$, який є її спектром.

Приклад 2. Припустимо, що автобуси за маршрутом курсують строго за графіком з інтервалом руху Δ. Нехай випадкова величина X – час очікування автобусу навмання взятим пасажиром на зупинці. Ця величина X приймає наперед невідомі дійсні невід'ємні значення x. Її спектром служить відрізок $[0;\Delta]$.

З кожною випадковою подією A можна зв'язати деяку випадкову величину X. Припустимо, що в результаті випробування може відбутися чи не відбутися подія A. Тоді можна розглядати випадкову величину X, яка дорівнює 1, коли настає подія A, і дорівнює 0, коли подія A не відбувається. Така випадкова величина X приймає два значення: $x=0$ і $x=1$. Її називають ***характеристичною випадковою величиною*** події A. На практиці часто замість подій розглядають їх характеристичні випадкові величини.

Розрізняють дискретні й неперервні випадкові величини.

Дискретною називають випадкову величину, всі можливі значення якої можна пронумерувати. Тобто, множина значень дискретної величини або скінченна, або нескінченна зліченна.

Неперервною називають випадкову величину, значення якої цілком заповнюють деякий числовий проміжок. Тобто, множина значень неперервної величини нескінченна незліченна.

Для повної характеристики випадкової величини необхідно знати всі можливі її значення, а також імовірність появи кожного з них у результаті випробування.

Законом розподілу випадкової величини називають будь-яке правило, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і відповідними ймовірностями.

1.4.2. Форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини. Найважливіші розподіли

Існують різні форми задання закону розподілу дискретної випадкової величини. Найчастіше використовуються дві наступні:

1) ряд розподілу; 2) інтегральна функція розподілу.

Рядом розподілу дискретної випадкової величини називають перелік у порядку зростання всіх можливих її значень, для кожного з яких указана відповідна ймовірність його появи.

Звичайно його оформлюють у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

де $p_i = P(X = x_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots$. Очевидно, що $\boxed{p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots = 1}$ (***умова нормування***), оскільки події $\{X = x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ несумісні й утворюють повну групу.

Ряд розподілу можна подати графічно. Для цього на осі абсцис Ox відкладають можливі значення випадкової величини, на осі ординат Oy – їх відповідні ймовірності, а потім сполучають сусідні точки (x_i, p_i), $i = 1, 2, \ldots, n, \ldots)$ відрізками прямих. Одержану ламану називають ***многокутником*** (***полігоном***) ***розподілу*** (рис. 10).

Ряд розподілу можна задати аналітично: $p_i = p(x_i)$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, де $p(x_i)$ – відома функція. Такий спосіб особливо важливий у випадку нескінченної множини значень x_i, $i = 1, 2, \ldots$.

<u>Біноміальний розподіл</u>. Розглянемо випадкову величину X – число появ $x_i = i$, $i = \overline{0, n}$ події A при n випробуваннях у межах біноміального експерименту за схемою Бернуллі. Її ряд розподілу

визначають за формулою Бернуллі $\boxed{p_i = P_n(i) = C_n^i p^i q^{n-i}}$. Такий розподіл дискретної випадкової величини X називають ***біноміальним***.

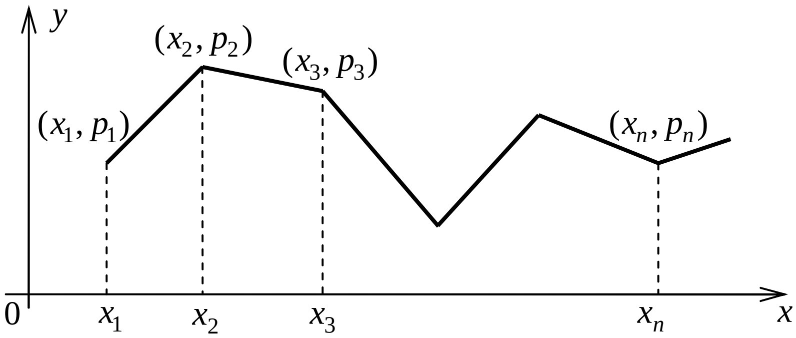


Рис. 10

<u>Пуассонівський розподіл</u>. Розглянемо дискретну випадкову величину X , що приймає тільки цілі невід'ємні значення 0 , 1, 2 , …, n ,…, послідовність яких нескінченна. Таку випадкову величину X називають розподіленою за ***законом Пуассона***, якщо ймовірність того, що вона прийме значення $x_i = i$, $i = 0,1,2,...$ визначається за формулою $\boxed{p_i = a^i e^{-a} / i!}$, де $a > 0$ – деяке додатне число, яке називають ***параметром*** закону Пуассона.

<u>Зауваження 1</u>. Розглянемо типову задачу, що приводить до розподілу Пуассона. На осі Ox випадковим чином розподіляються точки так, що виконуються наступні умови: 1) ймовірність попадання деякого числа точок на відрізок довжиною l залежить тільки від його довжини і не залежить від розміщення відрізка на осі Ox (точки розміщуються з однаковою середньою щільністю – властивість ***стаціонарності***); 2) точки розподіляються незалежно одна від одної (ймовірність попадання якої-небудь кількості точок на даний відрізок не залежить від числа точок, що потрапили на будь-який інший відрізок – властивість ***відсутності післядії***); 3) практично неможливо, щоб дві точки чи більше співпали (ймовірність того, що на достатньо малий відрізок довжиною Δx попадає одна

точка, є нескінченно малою величиною першого порядку відносно Δx, а ймовірність того, що на цей відрізок влучає більше однієї точки, є нескінченно малою величиною вищого порядку, ніж Δx – властивість ***ординарності***). Тоді випадкова величина X – число точок $x_i = i$, $i = 0,1,2,\ldots$, які попадають на відрізок довжиною l – розподілена за законом Пуассона $p_i = a^i e^{-a} / i!$, де a – середнє число точок, що припадає на довільний відрізок довжиною l.

Приклад 1. На виробничій дільниці $n = 3$ верстатів. При нормальному ході виробництва коефіцієнт використання кожного з них складає $p = 0{,}7$. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – числа $x_i = i$, $i = \overline{0,n}$ працюючих верстатів. Побудувати відповідний многокутник розподілу.

□ Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом $p_i = P(X = x_i) = C_n^i p^i q^{n-i}$, $i = \overline{0,n}$, де $q = 1 - p = 0{,}3$. Тоді

$$p_0 = C_3^0 \cdot 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^{3-0} = 0{,}027;$$

$$p_1 = C_3^1 \cdot 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^{3-1} = 0{,}189;$$

$$p_2 = C_3^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^{3-2} = 0{,}441;$$

$$p_3 = C_3^3 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^{3-3} = 0{,}343.$$

Таким чином, ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,027	0,189	0,441	0,343

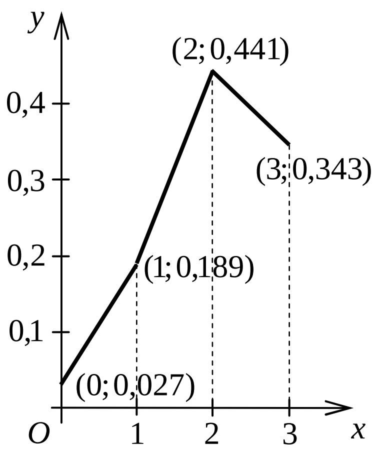


Рис. 11

Відповідний многокутник розподілу зображений на рис. 11. ■

Для характеристики як неперервних, так і дискретних випадкових величин часто зручніше користуватися ймовірністю події $\{X < x_i\}$.

Інтегральною функцією розподілу випадкової величини X

називають функцію $F(x)$, що при кожному значенні свого аргументу x дорівнює ймовірності того, що випадкова величина X прийме значення, менше x: $F(x) = P(X < x)$.

Графіком інтегральної функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X служить розривна ступінчата лінія, що має розриви типу скінченного стрибка в точках $x_i = i$, $i = 1, 2, \ldots$, які відповідають можливим значенням випадкової величини X.

З означення випливають наступні властивості інтегральної функції розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X:

1. $\boxed{F(x) = \sum_{i,\ x_i < x} p_i}$ при довільному x.

2. $0 \le F(x) \le 1$ при довільному x.

3. $F(-\infty) \equiv \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$; $F(+\infty) \equiv \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

4. Функція $F(x)$ – неспадна кусково-стала, що зберігає своє значення в кожному i-му діапазоні $(x_{i-1}, x_i]$ зміни аргументу x і стрибкоподібно збільшується в точках $x = x_i$, які відповідають можливим значенням випадкової величини X і розділяють указані діапазони, при цьому в кожній точці розриву x_i, $i = 1, 2, \ldots$ функція $F(x)$ неперервна зліва: $\lim_{x \to x_i - 0} F(x) = F(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

5. Для довільних α і β, $\alpha < \beta$:

$$\boxed{P(\alpha \le X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha) = F(\beta) - F(\alpha)}.$$

Зауваження 2. За допомогою ***ступінчатої одиничної функції*** $\eta(t)$, що визначається формулою $\eta(t) = \begin{cases} 1, & t > 0; \\ 0, & t \le 0, \end{cases}$ інтегральну функцію розподілу $F(x)$ можна подати одним виразом

$$F(x) = p(x_1)\eta(x - x_1) + p(x_2)\eta(x - x_2) + \ldots + p(x_n)\eta(x - x_n) + \ldots .$$

Приклад 2. Проводяться послідовні незалежні випробування приладів на надійність. Кожний наступний прилад досліджується тільки в тому випадку, коли попередній виявився надійним. Знайти інтегральну функцію розподілу $F(x)$ випадкової величини X – число $x_i = i$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ досліджених приладів, якщо ймовірність витримати випробування для кожного з приладів $p = 0{,}75$. Побудувати графік $F(x)$. Обчислити ймовірність $P(1{,}5 \le X < 3{,}8)$ попадання випадкової величини X в діапазон $[1{,}5; 3{,}8)$.

□ Маємо серію випробувань за схемою Бернуллі. Для кожного приладу $p = 0{,}75$. Тоді $q = 1 - p = 0{,}25$. Імовірність, що при першому випробуванні $x_1 = 1$ прилад виявиться ненадійним, після чого дослідження припиняються, визначається так: $p_1 = q = 0{,}25$. Якщо ж у цьому випадку прилад виявився надійним, то проводиться друге випробування. Імовірність, що при другому випробуванні $x_2 = 2$ прилад виявиться ненадійним, після чого дослідження припиняються, визначається рівністю: $p_2 = pq = 0{,}75 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}188$. Далі:

$$p_3 = p^2 q = 0{,}75^2 \cdot 0{,}25 \approx 0{,}141;\ \ldots;\ p_n = p^{n-1} q = 0{,}75^{n-1} \cdot 0{,}25;\ \ldots.$$

Тоді ряд розподілу має вигляд:

x_i	1	2	3	…	x_n	…
p_i	0,25	0,188	0,141	…	$0{,}75^{n-1} \cdot 0{,}25$	…

За формулою $F(x) = \sum\limits_{i,\ x_i < x} p_i$ знайдемо значення інтегральної функції розподілу $F(x)$ на кожному інтервалі $(-\infty; 1]$, $(1; 2]$, .., $(n-1; n]$, … між сусідніми можливими значеннями $x_i = i$, $i = 1, 2, ..., n, ...$ випадкової величини X:

$$F(x) = 0,\ x \in (-\infty; 1];\ \ F(x) = p_1 = q = 0{,}25,\ x \in (1; 2];$$

$$F(x) = p_1 + p_2 = q + pq \approx 0{,}438,\ x \in (2; 3];$$

$$F(x) = p_1 + p_2 + p_3 = q(1 - p^3)\big/(1 - p) = 1 - p^3 \approx 0{,}578,\ x \in (3; 4];$$

$$\ldots;\ F(x) = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} = q(1 - p^{n-1})\big/(1 - p) = 1 - p^{n-1} =$$

$$=1-0{,}75^{n-1},\ x\in(n-1;n];\ \ldots.$$

Приходимо до такої інтегральної функції розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\in(-\infty;1];\\ 0{,}25, & x\in(1;2];\\ 0{,}438, & x\in(2;3];\\ 0{,}578, & x\in(3;4];\\ \ldots; & \\ 1-0{,}75^{n-1}, & x\in(n-1;n];\\ \ldots, & \end{cases}$$

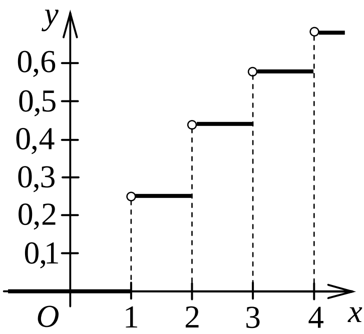


Рис. 12

графік якої зображений на рис. 12.

Тоді ймовірність попадання випадкової величини X в діапазон $[1{,}5;3{,}8)$:

$$P(1{,}5\le X<3{,}8)=F(3{,}8)-F(1{,}5)\approx 0{,}578-0{,}25\approx 0{,}328. \quad ■$$

1.4.3. Форми задання закону розподілу неперервної випадкової величини. Найважливіші розподіли

Говорити про розподіл ймовірностей між окремими значеннями неперервної випадкової величини X немає сенсу, оскільки їх число нескінченне, а ймовірність, що така випадкова величина прийме будь-яке одне своє значення x дорівнює нулю (це не суперечить тому, що вказане значення x можливе). Визначаючи ймовірність неперервної випадкової величини, мають на увазі попадання її значень у той чи інший інтервал.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X вводиться так само, як і для дискретної випадкової величини: $F(x)=P(X<x)$. Ця форма задання закону розподілу є універсальною, оскільки застосовується як для дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X характеризується наступними властивостями:

1) $0 \le F(x) \le 1$ при довільному x; 2) $F(-\infty) \equiv \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$;

$F(+\infty) \equiv \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$; 3) Функція $F(x)$ – неспадна;

4) для довільних α і β, $\alpha < \beta$: $\boxed{P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)}$.

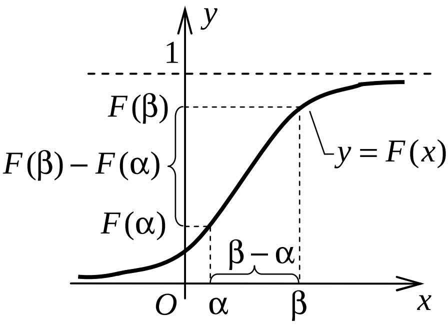


Рис. 13

Графіком інтегральної функції розподілу $F(x)$ неперервної випадкової величини X служить деяка неперервна лінія. На рис. 13 дана графічна інтерпретація процесу визначення ймовірності $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$ влучення в інтервал $(\alpha;\beta)$.

Приклад 1. Нехай

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x^2/4, & 0 \le x \le 2; \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

– інтегральна функція розподілу деякої неперервної випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що в результаті п'яти випробувань випадкова величина X тричі прийме значення з інтервалу $(-0{,}5;1{,}8)$.

□ Маємо серію $n = 5$ випробувань за схемою Бернуллі, де подія A полягає у влученні величини X в інтервал $(-0{,}5;1{,}8)$. Тоді $p = F(1{,}8) - F(-0{,}5) = 1{,}8^2/4 - 0 = 0{,}81$; $q = 1 - p = 0{,}19$. Знайдемо ймовірність $m = 3$ появ події A в $n = 5$ випробуваннях:

$$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}81^3 \cdot 0{,}19^{5-3} \approx 0{,}192. \quad \blacksquare$$

Інтегральна функція розподілу $F(x)$ не дозволяє порівнювати окремі значення неперервної випадкової величини X з точки зору ймовірнісних уявлень. Для цього використовується інша форма задання закону розподілу – щільність розподілу.

Нехай неперервна випадкова величина X характеризується неперервно диференційовною інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Відношення $P(x < X < x + \Delta x)/\Delta x$ ймовірності влучення випадкової величини X в малий діапазон $(x; x + \Delta x)$ до довжини цього діапазону Δx можна розглядати як середню щільність ймовірності випадкової величини X на проміжку $(x; x + \Delta x)$. Границя цього відношення при $\Delta x \to 0$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x)$$

характеризує щільність ймовірності випадкової величини X у точці x.

Щільністю* (*диференціальною функцією*) *розподілу $f(x)$ неперервної випадкової величини X називають похідну інтегральної функції розподілу $F(x)$: $\boxed{f(x) = F'(x)}$.

Властивості щільності розподілу $f(x)$:

1. Щільність розподілу невід'ємна $f(x) \geq 0$ як похідна неспадної функції.
2. Невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від щільності розподілу $f(x)$ дорівнює одиниці: $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1}$.
3. Імовірність $P(\alpha < X < \beta)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\alpha; \beta)$, $\alpha < \beta$ знаходиться за формулою $\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}$ і чисельно дорівнює площі S відповідної криволінійної трапеції (рис. 14).

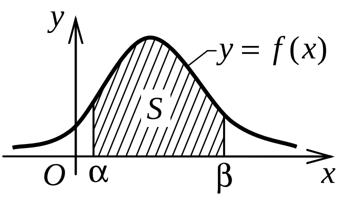


Рис. 14

4. Інтегральна функція розподілу $F(x)$ визначається за формулою:

$$\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx}.$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана своєю щільністю розподілу $f(x)$:

$$f(x)=\begin{cases} C\cos 2x, & -\pi/4 \le x \le \pi/4; \\ 0, & |x| > \pi/4. \end{cases}$$

Знайти значення сталого коефіцієнта C, інтегральну функцію розподілу $F(x)$, ймовірність $P(\pi/12 < X < 4)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\pi/12; 4)$. Побудувати графіки диференціальної $f(x)$ та інтегральної $F(x)$ функцій розподілу.

□ Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx +$

$$+\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} C\cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{+\infty} 0dx = \frac{C}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = C; \quad C = 1.$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу $F(x)$:

1) На ділянці $x < -\pi/4$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

2) На ділянці $-\pi/4 \le x \le \pi/4$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{x} \cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2};$$

3) На ділянці $x > \pi/4$:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x dx + \int\limits_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$$

Таким чином: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi/4; \\ (1/2)(\sin 2x + 1), & -\pi/4 \le x \le \pi/4; \\ 1, & x > \pi/4. \end{cases}$

Обчислимо ймовірність $P(\pi/12 < X < 4)$ влучення неперервної випадкової величини X в інтервал $(\pi/12; 4)$:

<u>Перший спосіб</u>: $P\left(\frac{\pi}{12} < x < 4\right) = \int\limits_{\pi/12}^{4} f(x)dx = \int\limits_{\pi/12}^{\pi/4} \cos 2x dx +$

$$+\int_{\pi/4}^{4} 0dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{\pi/12}^{\pi/4} = \frac{1}{4}.$$

Другий спосіб:

$$P(\pi/12 < x < 4) = F(4) - F(\pi/12) = 1 - (1/2)(\sin(\pi/6) + 1) = 1/4.$$

(Графіки диференціальної $f(x)$ та інтегральної $F(x)$ функцій розподілу побудуйте самостійно). ■

Рівномірний розподіл. Неперервна випадкова величина X має ***рівномірний розподіл*** на відрізку $[\alpha;\beta]$, якщо її щільність розподілу $f(x)$ на цьому проміжку стала, при цьому

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha; \\ 1/(\beta - \alpha), & \alpha \le x \le \beta; \\ 0, & x > \beta. \end{cases}}$$

Інтегральна функція $F(x)$ рівномірно розподіленої випадкової величини визначається за формулою

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha; \\ (x - \alpha)/(\beta - \alpha), & \alpha \le x \le \beta; \\ 0, & x > \beta. \end{cases}}$$

Графіки інтегральної $F(x)$ та диференціальної $f(x)$ функцій рівномірного розподілу зображені відповідно на рис. 15 і рис. 16.

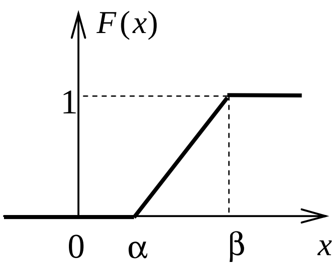


Рис. 15

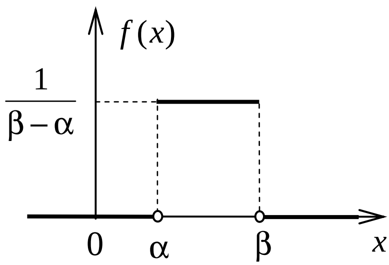


Рис. 16

Показниковий розподіл. Неперервна випадкова величина X розподілена ***за показниковим*** (***експоненціальним***) ***законом***, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}}$$

де $\lambda>0$ – додатний ***параметр*** розподілу.

Знайдемо інтегральну функцію експоненціального розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{0} 0\,dx+\lambda\int_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}.$$

Таким чином, $\boxed{F(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases}}$

Графіки інтегральної $F(x)$ та диференціальної $f(x)$ функцій експоненціального розподілу зображені відповідно на рис. 17 і рис. 18.

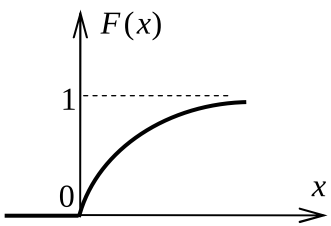


Рис. 17

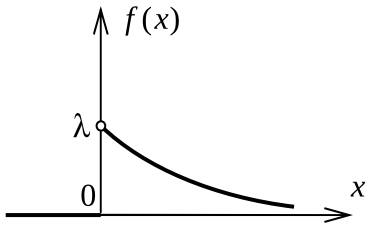


Рис. 18

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини X, що має експоненціальний розподіл, в інтервал $(\alpha;\beta)$, $0\le\alpha<\beta$:

$$\boxed{P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}}.$$

Зауваження 1. Експоненціальний розподіл часто зустрічається в задачах теорії масового обслуговування та в теорії надійності.

Припустимо, що деякий прилад починає працювати в момент часу $t=0$ і в деякий момент часу $t>0$ відмовляє. Позначимо через T випадкову величину – тривалість безвідмовної роботи приладу. Інтегральна функція розподілу $F(x)=P(T<t)$ визначає ймовірність відмови за проміжок часу $(0;t)$. Імовірність $R(t)$ протилежної події – безвідмовна робота приладу на протязі часу $(0;t)$ – називають ***функцією надійності*** $R(t)=P(T>t)$. При експоненціальному законі розподілу маємо $R(t)=P(T>t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$. Таким чином, безвідмовна робота приладу залежить тільки від інтенсивності відмов λ і пройденого часу t, але не залежить від його попередньої роботи.

Нормальний розподіл. Неперервна випадкова величина X розподілена ***за нормальним законом***, якщо її щільність розподілу має вигляд:

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}},$$

де a і σ – ***параметри*** розподілу, тлумачення яких наведено далі.

Цей ***закон*** носить ім'я ***Гаусса***, оскільки вперше був запропонований ним при дослідженні випадкових похибок вимірювань, виходячи з двох припущень: 1) похибки різного знака, але однакові за величиною, мають однакову ймовірність; 2) малі похибки більш ймовірні, ніж великі (промахи).

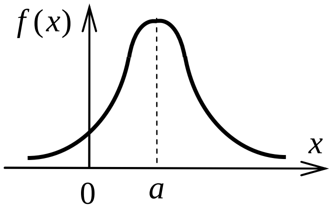


Рис. 19

Графіком щільності нормального розподілу $f(x)$ служить горбоподібна крива, зображена на рис. 19. Пряма $x=a$ є її віссю симетрії.

Інтегральна функція нормального розподілу $F(x)$ визначається так:

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(u-a)^2/(2\sigma^2)}\,du}.$$

Графік інтегральної функції $F(x)$ поданий на рис. 20. Він центрально симетричний відносно точки $S(a;0{,}5)$.

Оскільки останній інтеграл не виражається через елементарні функції, то для обчислення $F(x)$ використовують співвідношення

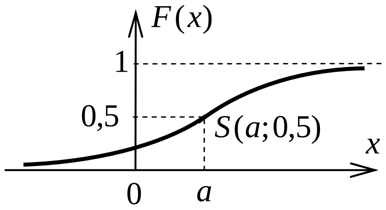


Рис. 20

$$\boxed{F(x) = F^*\big((x-a)/\sigma\big)},$$

де $$\boxed{F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du}$$

– інтегральна функція ***стандартного нормального розподілу*** з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$. Її можна подати через функцію Лапласа $\Phi(x)$:

$$F^*(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-u^2/2} du + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} + \Phi(x).$$

Знайдемо ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини X в діапазон $(\alpha;\beta)$, $\alpha < \beta$:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = F^*\big((\beta - a)/\sigma\big) - F^*\big((\alpha - a)/\sigma\big) =$$
$$= 0{,}5 + \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - 0{,}5 - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big) =$$
$$= \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big).$$

Отже, $$\boxed{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\big((\beta - a)/\sigma\big) - \Phi\big((\alpha - a)/\sigma\big)}.$$

<u>Приклад 3</u>. Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a = 20$ і $\sigma = 10$. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X потраплять в інтервал $(15;40)$.

□ Тут $\alpha = 15$ і $\beta = 40$. Тоді

$$P(15 < X < 40) = \Phi\big((40-20)/10\big) - \Phi\big((15-20)/10\big) = \Phi(2) -$$
$$- \Phi(-0{,}5) = \Phi(2) + \Phi(0{,}5) = 0{,}47725 + 0{,}19146 \approx 0{,}669. \quad \blacksquare$$

<u>Зауваження 2</u>. Часто треба обчислити $P(|X - a| < \delta)$ – ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її значення $x = a$ за модулем менше заданого додатного числа δ, тобто ймовірність $P(a - \delta < X < a + \delta)$. Покладаючи $\alpha = a - \delta$ і $\beta = a + \delta$ у формулі для $P(\alpha < X < \beta)$, дістанемо

$$\boxed{P(|X-a|<\delta)=2\Phi(\delta/\sigma)}.$$

Приклад 4. Неперервна випадкова величина X розподілена за нормальним законом з параметрами $a=20$ і $\sigma=5$. Знайти ймовірність того, що відхилення випадкової величини X від її значення $x=a$ за модулем менше заданого додатного числа $\delta=3$.

□ $P(|X-20|<3)=2\Phi(3/5)=2\cdot 0{,}22575\approx 0{,}452$. ■

1.4.4. Числові характеристики випадкових величин

Закон розподілу випадкової величини з імовірнісної точки зору є її вичерпною характеристикою. Проте в багатьох практичних задачах не має потреби у такому повному описі. Досить указати тільки окремі числові параметри, що у стислій формі характеризують суттєві риси розподілу. Такі числа називають ***числовими характеристиками*** випадкової величини. Часто знання числових характеристик відкриває можливість розв'язувати задачі з випадковими величинами, не знаючи законів розподілу.

Числові характеристики випадкових величин *не є випадковими величинами*. Для заданої випадкової величини будь-яка з цих характеристик має тільки одне певне значення, що не залежить від кількості проведених випробувань і конкретного результату кожного з них.

Далі розглядаються основні числові характеристики, що відображають форму розподілу та його положення.

Математичним сподіванням $M(X)$ називають середнє зважене за ймовірностями значення випадкової величини X, що визначається за формулами:

1) $\boxed{M(X)=\sum_i x_i p_i}$ – для дискретної випадкової величини X

(сума добутків всіх можливих значень x_i, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$ випадкової величини X на відповідні ймовірності p_i, $i=1,2,\ldots,n,\ldots$);

2) $\boxed{M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx}$ – для неперервної випадкової величини X (невласний інтеграл з нескінченними межами інтегрування від добутку значення x випадкової величини X на відповідне зна-

чення щільності розподілу $f(x)$).

Математичне сподівання – найважливіша числова характеристика, що відображає зміщення значень випадкової величини на числовій осі Ox відносно початку координат.

Математичне сподівання $M(X)$ також називають ***центром розподілу***, оскільки воно служить середнім (зваженим за ймовірностями) значенням випадкової величини X, навколо якого групуються всі її можливі значення. У наближених розрахунках замість самої випадкової величини звичайно використовують її математичне сподівання.

Зауваження 1. Математичне сподівання $M(X)$ випадкової величини X може не співпадати ні з одним з її можливих значень.

Модою $Mo(X)$ називають локально найбільш імовірне значення випадкової величини X, тобто те можливе значення x, для якого ймовірність p_i (у дискретному випадку) чи щільність розподілу $f(x)$ (у неперервному випадку) досягає локального максимуму.

Розподіл з однією модою називають ***унімодальним*** (рис. 21). Також виділяють ***полімодальні*** (рис. 22), ***антимодальні*** (рис. 23) і ***безмодальні*** (рис. 24) розподіли.

Неперервні випадкові величини мають ще одну характеристику положення на осі Ox – медіану.

Медіаною $Me(X)$ називають значення неперервної випадкової величини X, для якого справджується рівність

$$\boxed{P\left(X < Me(X)\right) = P\left(X > Me(X)\right)}.$$

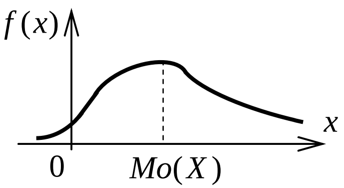


Рис. 21

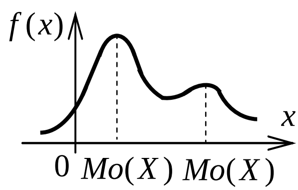


Рис. 22

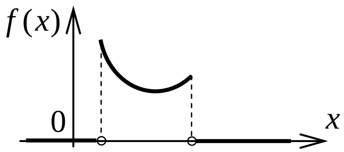


Рис. 23

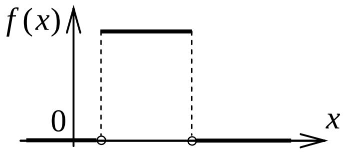


Рис. 24

Пряма $x = Me(X)$, що проходить через медіану перпендикулярно до осі Ox, ділить площу фігури, обмеженої графіком щільності розподілу $f(x)$ і віссю Ox, на дві рівні частини (рис. 25).

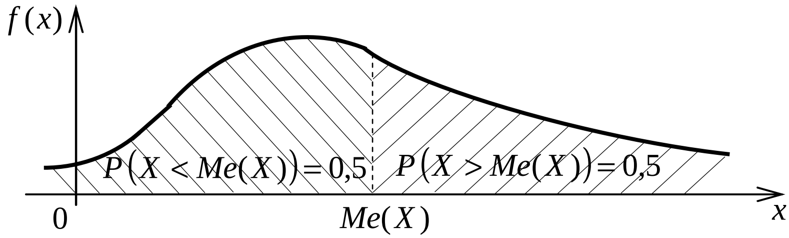


Рис. 25

<u>Зауваження 2</u>. Для симетричного унімодального розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються. Обернене твердження, в загальному випадку, не справджується.

Нехай $a = M(X)$. ***Дисперсією*** $D(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання квадрата її відхилення $X - a$ від математичного сподівання: $\boxed{D(X) = M\left((X-a)^2\right)}$. Дисперсія $D(X)$ характеризує розсіювання цієї величини навколо математичного сподівання і визначається за формулами:

1) $\boxed{D(X) = \sum_i (x_i - a)^2 p_i}$ – для дискретної величини X;

2) $\boxed{D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx}$ – для неперервної величини X.

Дисперсія має розмірність квадрата випадкової величини, що не завжди зручно. Тому для характеристики розсіювання випадкової величини X часто застосовують ***середнє квадратичне відхилення*** $\sigma(X)$ – квадратний корінь із дисперсії: $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{D(X)}}$.

На рис. 26 подані графіки щільності розподілу $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ двох неперервних випадкових величин X_1 і X_2 з однаковими математичними сподіваннями $M(X_1)=M(X_2)=a$ і різними дисперсіями $D(X_1)<D(X_2)$. Розподіл з більшою дисперсією (відповідно з більшим середнім квадратичним відхиленням) має вищий ступінь розсіювання (сильніше "розмазаний" вздовж осі Ox).

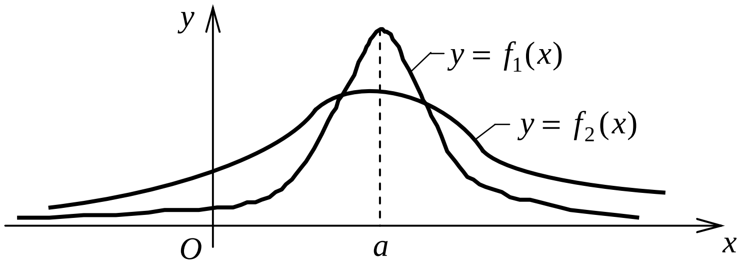


Рис. 26

<u>Зауваження 3</u>. Для нормально розподіленої випадкової величини X зі щільністю розподілу $f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}$ параметри a і σ відповідно дорівнюють її математичному сподіванню $M(X)$ і середньому квадратичному відхиленню $\sigma(X)$:

$$a=M(X); \qquad \sigma=\sigma(X).$$

У цьому полягає <u>статистичний зміст</u> параметрів a і σ нормального закону розподілу. У додатку 1 наведено формули для обчислення математичного сподівання та дисперсії найважливіших розподілів.

Розглянемо унімодальний розподіл $y=f(x)$. Позначимо $a=M(X)$. Для характеристики ступеня асиметрії ("зкошеності") графіка функції щільності розподілу $y=f(x)$ використовують безрозмірний ***коефіцієнт асиметрії*** S, що визначається за формулою

$$\boxed{S=\mu_3(X)/\sigma^3(X)}, \quad \text{де} \quad \boxed{\mu_3(X)=M\left((X-a)^3\right)}.$$

У випадку симетричності графіка $y = f(x)$ відносно прямої $x = a$ (зокрема, для нормального розподілу) коефіцієнт асиметрії дорівнює нулю: $S = 0$. Якщо $S > 0$, то крива щільності розподілу більш полога справа від моди $Mo(X)$ (рис. 27). При $S < 0$ вона більш полога зліва від моди $Mo(X)$ (рис. 28).

Для характеристики ступеня "гостровершинності" графіка щільності унімодального розподілу $y = f(x)$ використовують безрозмірний ***коефіцієнт ексцесу*** E, що визначається за формулою

$$\boxed{E = \mu_4(X) / \sigma^4(X) - 3}, \quad \text{де} \quad \boxed{\mu_4(X) = M\left((X - a)^4\right)}.$$

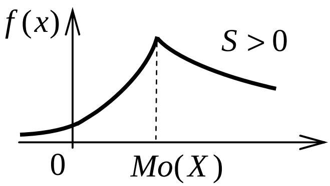


Рис. 27

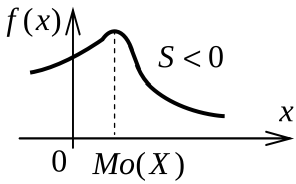


Рис. 28

У випадку нормального закону розподілу випадкової величини коефіцієнт ексцесу дорівнює нулю: $E = 0$. Усі інші розподіли порівнюються з нормальним: ті, для яких $E > 0$, є більш "гостровершинними", а ті, для яких $E < 0$, – менш "гостровершинними" (рис. 29).

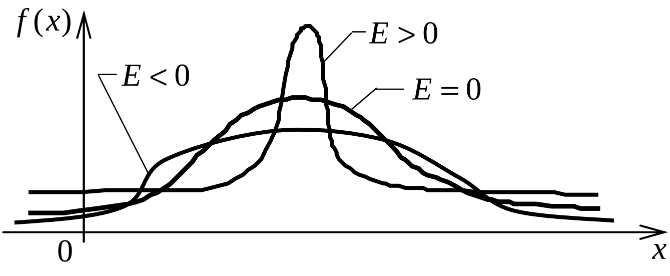


Рис. 29

Розглянемо деяку випадкову величину X з інтегральною функцією розподілу $F(x)$. Нехай p – деяке дійсне число таке, що

$0 < p < 1$. Корінь рівняння $\boxed{F(x) = p}$ називають ***квантилем порядку*** p випадкової величини X і позначають x_p.

Медіана є квантилем порядку $p = 0{,}5$: $Me(X) = x_{0,5}$. При цьому квантилі $x_{0,25}$, $x_{0,5}$ і $x_{0,75}$ ділять вісь Ox на такі чотири частини, що ймовірності попадання в них випадкової величини X однакові й дорівнюють $0{,}25$ (рис. 30).

Для багатьох важливих розподілів складені таблиці значень квантилей найбільш уживаних порядків.

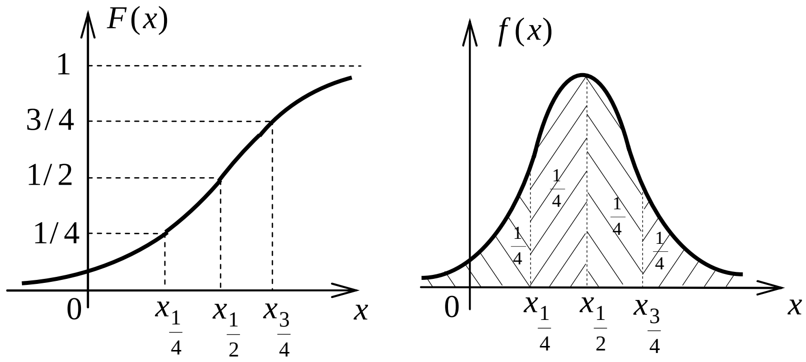


Рис. 30

<u>Властивості математичного сподівання та дисперсії</u>:

1. *Математичне сподівання сталої величини* C *дорівнює їй самій*: $\boxed{M(C) = C}$.

□ Дійсно, сталу C можна розглядати як дискретну випадкову величину, що приймає лише одне значення C з імовірністю 1. Тому $M(C) = C \cdot 1 = C$. ■

2. *Сталий множник можна виносити за знак математичного сподівання*: $\boxed{M(CX) = C\,M(X)}$.

□ Дійсно, математичне сподівання – це або скінченна сума, або ряд, або інтеграл. Сталу можна виносити і за знак суми, і за знак ряду, і за знак інтеграла. ■

3. *Дисперсія сталої величини* C *дорівнює нулю*: $\boxed{D(C) = 0}$.

□ Дійсно, $D(C)=M\left((C-C)^2\right)=\mathrm{M}(0)=0$. ■

4. *Дисперсія добутку сталої величини* C *на випадкову величину* X *дорівнює добутку квадрата цієї сталої на дисперсію випадкової величини* X : $\boxed{D(CX)=C^2D(X)}$.

□ Дійсно, $D(CX)=M\left((CX-M(CX))^2\right)=M\left((CX-CM(X))^2\right)=$

$$=M\left(C^2(X-M(X))^2\right)=C^2M\left((X-M(X))^2\right)=C^2D(X). \ ■$$

5. $\boxed{D(X)=M(X^2)-(M(X))^2}$.

□ Дійсно,

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=M\left(X^2-2X\,M(X)++(M(X))^2\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2M(X)\cdot M(X)+(M(X))^2=M\left(X^2\right)-(M(X))^2. \ ■$$

Приклад 1. На підприємстві ймовірність виготовлення бракованої деталі $p=15\%$. У відділ технічного контролю (ВТК) одна за одною надходять $n=6$ деталей. Скласти ряд розподілу випадкової величини X – числа $x_i=i$, $i=\overline{0,n}$ бракованих деталей серед перевірених. Знайти математичне сподівання $M(X)$, моду $Mo(X)$, дисперсію $D(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$.

□ Випадкова величина X розподілена за біноміальним законом $p_i=P(X=x_i)=C_n^i p^i q^{n-i}$, $i=\overline{0,n}$, де $p=15\%=0{,}15$, $q=1-p=0{,}85$. Тоді ряд розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,3771	0,3993	0,1762	0,0415	0,0055	0,0004	0,0000

З аналізу ряду розподілу знайдемо моду: $Mo(X)=1$.

Далі обчислимо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$a=M(X)=\sum_i x_i p_i=0\cdot 0{,}3771+1\cdot 0{,}3993+2\cdot 0{,}31762+$$
$$+3\cdot 0{,}0415+4\cdot 0{,}0055+5\cdot 0{,}0004+6\cdot 0{,}0000\approx 0{,}9000;$$

$$D(X)=\sum_i (x_i-a)^2 p_i=(0-0{,}9000)^2\cdot 0{,}3771+(1-0{,}9000)^2\times$$

$$\times 0{,}3993+(2-0{,}9000)^2\cdot 0{,}31762+(3-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0415+$$

$$+(4-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0055+(5-0{,}9000)^2\cdot 0{,}0004+(6-0{,}9000)^2\times$$

$$\times 0{,}0000\approx 4{,}2045;\quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{4{,}2045}=2{,}0505.\quad \blacksquare$$

Приклад 2. Неперервна випадкова величина X задана інтегральною функцією розподілу $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0,\ x<-1; \\ (x+1)^3/8,\ -1\le x\le 1; \\ 1,\ x>1. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$, математичне сподівання $M(X)$, дисперсію $D(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ і медіану $Me(X)$.

□ Знайдемо щільність розподілу $f(x)=F'(x)$:

1) На ділянці $x<-1$: $f(x)=0'=0$;

2) На ділянці $-1\le x\le 1$: $f(x)=\dfrac{d}{dx}\left((x+1)^3/8\right)=\dfrac{3}{8}(x+1)^2$;

3) На ділянці $x>1$: $f(x)=1'=0$.

Таким чином: $f(x)=\begin{cases} 0,\ x<-1; \\ (3/8)(x+1)^2,\ -1\le x\le 1; \\ 0,\ x>1. \end{cases}$

Далі обчислимо математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення:

$$a=M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{-1} x\cdot 0\,dx+\int_{-1}^{1} x\frac{3(x+1)^2}{8}dx+\int_{1}^{+\infty} x\cdot 0\,dx=$$

$$=0+(3/8)\int_{-1}^{1}(x^3+2x^2+x)\,dx+0=(3/8)(x^4/4+2x^3/3+$$

$$+x^2/2)\Big|_{-1}^{1}=0{,}5\,; \qquad D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)\,dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{-1}(x-0{,}5)^2\cdot 0\,dx+\int_{-1}^{1}(x-0{,}5)^2\frac{3(x+1)^2}{8}dx+\int_{1}^{+\infty}(x-0{,}5)^2\cdot 0\,dx=$$

$$=(3/32)\int_{-1}^{1}\left(4x^4+4x^3-3x^2-2x+1\right)dx=(3/32)\left((4/5)x^5+x^4-\right.$$

$$\left.-x^3-x^2+x\right)\Big|_{-1}^{1}=0{,}15\,; \quad \sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}15}\approx 0{,}3873\,.$$

Медіану $Me(X)$ як квантиль порядку $p=0{,}5$ знайдемо з рівняння $F(x)=0{,}5$:

$$(x+1)^3\big/8=0{,}5; \quad (x+1)^3=4; \quad Me(X)=x=\sqrt[3]{4}-1\approx 0{,}5874\,. \ ■$$

Зауваження 4. Для опису властивостей випадкової величини X, крім розглянутих вище характеристик, також використовуються й інші. До них належать початкові та центральні моменти.

Початковим моментом k***-го порядку*** $\alpha_k(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання її k–го степеня: $\alpha_k(X)=M(X^k)$. Зокрема, *математичне сподівання* $M(X)$ *є першим початковим моментом* $\alpha_1(X)$: $\alpha_1(X)=M(X)$.

Центральним моментом k***-го порядку*** $\mu_k(X)$ випадкової величини X називають математичне сподівання k-го степеня її відхилення $X-a$ від математичного сподівання $a=M(X)$: $\mu_k(X)=M\left((X-a)^k\right)$. Зокрема, *дисперсія* $D(X)$ *є другим центральним моментом* $\mu_2(X)$: $\mu_2(X)=D(X)$.

Приклад 3. Знайти математичне сподівання $a=M(X)$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$, центральні моменти $\mu_3(X)$ і $\mu_4(X)$, коефіцієнт асиметрії S і коефіцієнт ексцесу E випадкової величини X, що розподілена за показниковим законом:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0.\end{cases} \qquad \text{(Розв'язати самостійно).}$$

1.4.5. Багатовимірні випадкові величини

При вивченні масових випадкових явищ часто необхідно декілька випадкових величин, що їх характеризують, розглядати сумісно, враховуючи зв'язки між ними.

Систему n випадкових величин X_1, X_2, ..., X_n, кожна з яких набуває те чи інше своє значення у результаті одного й того ж випробування, позначають $X=(X_1, X_2, ..., X_n)$ і називають ***n-вимірною випадковою величиною*** або ***n-вимірним випадковим вектором***.

Приклад 1. Підприємство виготовляє керамічну плитку. Якщо для кожного виробу контролюються його довжина X_1 і ширина X_2, то маємо двовимірну випадкову величину $X=(X_1, X_2)$. Якщо ж, крім зазначених параметрів, для кожного виробу контролюється також його товщина X_3, то маємо тривимірну випадкову величину $X=(X_1, X_2, X_3)$.

Як і для одновимірної випадкової величини, для випадкового вектора вводять поняття закону розподілу і числові характеристики.

Зауваження 1. Надалі, для простоти, розглядаються тільки двовимірні випадкові величини $Z=(X,Y)$. Узагальнюючи наведені положення, їх можна перенести за аналогією на випадкові вектори більшої розмірності.

Двовимірна випадкова величина $Z=(X,Y)$ характеризується множинами значень U_X і U_Y своїх компонент X і Y, а також сумісним двовимірним законом розподілу. У відповідності з типом компонент X і Y розрізняють ***дискретні***, ***неперервні*** та ***змішані двовимірні випадкові величини*** $Z=(X,Y)$.

Двовимірну випадкову величину $Z=(X,Y)$ геометрично можна подати як випадкову точку $M(X,Y)$ на координатній площині Oxy або як відповідний випадковий радіус-вектор $\overrightarrow{OM}$.

Закон розподілу дискретної випадкової величини $Z=(X,Y)$ можна задати у формі ***матриці розподілу*** – прямокутної таблиці, що містить усі можливі значення компонент x_i, $i=1, 2, ..., k$, ...

і y_j, $j = 1, 2, \ldots, l, \ldots$, та для кожної з можливих пар (x_i, y_j) – її ймовірність $p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$:

(X,Y)	x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{k1}	$\ldots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{k2}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_l	p_{1l}	p_{2l}	$\ldots$	p_{kl}	$\ldots$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Властивості матриці розподілу:

1. $\boxed{\sum_{i,j} p_{ij} = 1}$ (умова нормування).
2. $\boxed{p_i = \sum_j p_{ij}}$ (перехід до ряду розподілу компоненти X).
3. $\boxed{p_j = \sum_i p_{ij}}$ (перехід до ряду розподілу компоненти Y).

Найбільш універсальною формою задання закону розподілу як дискретних, так і неперервних та змішаних багатовимірних випадкових величин є інтегральна функція розподілу.

Інтегральною функцією розподілу двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$ (***функцією сумісного розподілу*** двох випадкових величин X і Y) називають функцію $F(x, y)$, яка для кожної пари (x, y) значень своїх аргументів дорівнює ймовірності того, що випадкові компоненти X і Y виявляться меншими за відповідні значення аргументів:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

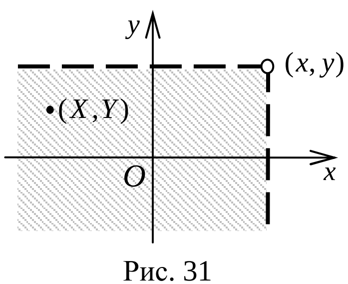


Рис. 31

Геометрично інтегральна функція $F(x, y)$ двовимірного випадкового вектора $Z = (X, Y)$ – це ймовірність влучення випадкової точки $M(X, Y)$ у заштриховану на рис. 31 область координатної площини Oxy

(нескінченний прямий кут з вершиною в точці (x, y)).

З означення випливають наступні властивості інтегральної функції розподілу $F(x, y)$:

1.°Усі значення функції $F(x, y)$ задовольняють подвійній нерівності $0 \le F(x, y) \le 1$.

2.° $F(x, y)$ – неспадна функція за кожним аргументом, тобто

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1, y) \le F(x_2, y); \quad y_1 < y_2 \Rightarrow F(x, y_1) \le F(x, y_2).$$

3.°Справедливі граничні співвідношення:

$$F(-\infty, -\infty) = 0; \ F(-\infty, y) = 0; \ F(x, -\infty) = 0; \ F(+\infty, +\infty) = 1.$$

4.°При $y \to +\infty$ двовимірна інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ визначає інтегральну функцію розподілу $F_X(x)$ компоненти X: $F_X(x) = F(x, +\infty)$. Аналогічно, при $x \to +\infty$ двовимірна інтегральна функція розподілу $F(x, y)$ визначає інтегральну функцію розподілу $F_Y(y)$ компоненти Y: $F_Y(y) = F(+\infty, y)$.

Графіком інтегральної функції розподілу неперервної двовимірної випадкової величини (X, Y) служить деяка поверхня $z = F(x, y)$, розміщена між площинами $z = 0$ і $z = 1$ (рис. 32). Поверхня $z = F(x, y)$ асимптотично наближається до площини $z = 0$, коли або $x \to -\infty$, або $y \to -\infty$, або одночасно $x \to -\infty$ і $y \to -\infty$. При одночасному виконанні умов $x \to +\infty$ і $y \to +\infty$ поверхня $z = F(x, y)$ асимптотично наближається до площини $z = 1$.

Дві випадкові величини X і Y називають ***незалежними***, якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яке значення набула інша.

Для двох незалежних випадкових величин X і Y справедливе співвідношення $\boxed{F(x, y) = F_X(x) F_Y(y)}$, що служить ***критерієм незалежності***.

Якщо критерій не виконується хоча б в одній точці, то величини X і Y є ***залежними***.

Таким чином, у випадку залежності між випадковими величинами X і Y перехід від двох одновимірних законів $F_X(x)$ і $F_Y(y)$ до двовимірного закону розподілу $F(x, y)$ здійснити неможливо. Для цього необхідно знати умовні закони розподілу.

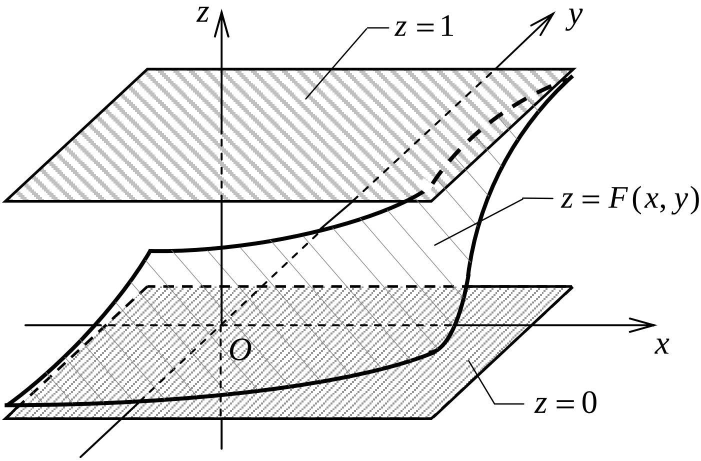


Рис. 32

Умовний закон розподілу у формі інтегральної функції $F(x/y)$ – це закон розподілу випадкової величини X при умові, що інша випадкова величин Y прийняла певне конкретне значення.

Якщо величини X і Y – незалежні, то

$$F(x/y) = F_X(x); \qquad F(y/x) = F_Y(y).$$

<u>Зауваження 2</u>. Необхідно розрізняти ***функціональну*** ("жорстку") і ***статистичну*** ("у тенденції") ***залежності***. Якщо випадкові величини X і Y зв'язані функціональною залежністю $y = \varphi(x)$, то за відомим значенням X можна однозначно визначити відповідне значення Y. У випадку статистичної залежності між випадковими величинами X і Y за відомим значенням однієї з них можна встановити тільки умовний закон розподілу іншої, тобто визначити ймовірність появи довільно взятого значення іншої величини.

Наприклад, між масою Y зібраного врожаю і масою X внесених при вирощуванні добрив існує статистична (ймовірнісна) залежність.

Розглянемо найважливіші числові характеристики двовимірних випадкових величин.

Математичним сподіванням двовимірної випадкової величини $Z=(X,Y)$ називають невипадковий вектор (a_x,a_y), компонентами якого є математичні сподівання відповідних компонент випадкового вектора $Z=(X,Y)$: $a_x=M(X)$ і $a_y=M(Y)$. Точка (a_x,a_y) визначає центр двовимірного розподілу.

Дисперсією двовимірної випадкової величини $Z=(X,Y)$ називають невипадковий вектор (σ_x^2,σ_y^2), компонентами якого є дисперсії відповідних компонент випадкового вектора $Z=(X,Y)$: $\sigma_x^2=D(X)$ і $\sigma_y^2=D(Y)$.

Особливу роль, як характеристика двомірного випадкового вектора $Z=(X,Y)$, відіграє другий змішаний центральний момент

$$\boxed{k_{xy}=M\big((X-a_x)(Y-a_y)\big)},$$

який називають ***кореляційним моментом*** або ***коваріацією***.

Для дискретних випадкових величин X і Y кореляційний момент k_{xy} визначається за формулою

$$\boxed{k_{xy}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i-a_x)(y_i-a_y)p_{ij}},$$

де $p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j)$; n – кількість можливих значень компоненти X; m – кількість можливих значень компоненти Y.

Кореляційний момент k_{xy} характеризує ступінь розсіювання випадкових величин X і Y навколо їх математичного сподівання (a_x,a_y), а також ступінь лінійної залежності між ними. Для характеристики тільки ступеня лінійної залежності між випадковими величинами X і Y використовується ***коефіцієнт кореляції***

$$\boxed{r_{xy}=\frac{k_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}},$$

де $\sigma_x = \sqrt{D(X)}$ і $\sigma_y = \sqrt{D(Y)}$ – середні квадратичні відхилення випадкових величин відповідно X і Y.

Якщо $r_{xy} \neq 0$, то випадкові величини X і Y називають ***корельованими***.

Значення коефіцієнта кореляції r_{xy} знаходиться в діапазоні від –1 до +1. Якщо X і Y незалежні між собою, то $r_{xy} = 0$, тобто X і Y – некорельовані. Якщо X і Y зв'язані лінійною функціональною залежністю $Y = aX + b$, то $r_{xy} = -1$ при $a < 0$ і $r_{xy} = 1$ при $a > 0$. *Чим більша абсолютна величина коефіцієнта кореляції* r_{xy}, *тим ближче статистична залежність величин* X *і* Y *до лінійної функціональної.*

Зауваження 3. Поняття залежності ширше поняття корельованості. Дві незалежні випадкові величини завжди некорельовані. Дві корельовані випадкові величини обов'язково залежні. Проте дві залежні випадкові величини можуть бути як корельованими, так і ні, оскільки залежність може мати нелінійний характер.

Серед числових характеристик умовних розподілів залежних випадкових величин X і Y найбільше практичне значення має умовні математичні сподівання.

Умовним математичним сподіванням $a_{x/y} = M(X/y)$ випадкової величини X називають її математичне сподівання, обчислене при умові, що інша випадкова величина Y набула певного конкретного значення $Y = y$.

Для дискретних випадкових величин X і Y умовні математичні сподівання визначаються за формулами

$$\boxed{a_{x/y_j} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_{i/j}}; \quad \boxed{a_{y/x_i} = \sum_{j=1}^{m} y_j p_{j/i}},$$

де
$$p_{i/j} = P(X = x_i / Y = y_j) = p_{ij} \big/ P(Y = y_j);$$
$$p_{j/i} = P(Y = y_j / X = x_i) = p_{ij} \big/ P(X = x_i).$$

Умовне математичне сподівання $a_{x/y}$, що є деякою функцією від y: $a_{x/y} = h(y)$, називають ***регресією*** X ***на*** Y. Аналогічно, умовне математичне сподівання $a_{y/x}$, що є деякою функцією від x: $a_{y/x} = g(x)$, називають ***регресією*** Y ***на*** X.

Аналітичні вирази $a_{x/y} = h(y)$ і $a_{y/x} = g(x)$ називають ***рівняннями регресії***. Графіки функцій $a_{x/y} = h(y)$ і $a_{y/x} = g(x)$ називають ***лініями регресії***.

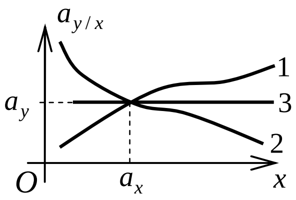


Рис. 33

Регресійний аналіз дозволяє виявити характер залежності між величинами X і Y. На рис. 33 лінія регресії 1 показує, що між X і Y існує додатна кореляційна залежність, при цьому $r_{xy} > 0$. Лінія регресії 2 показує, що між X і Y існує від'ємна кореляційна залежність, при цьому $r_{xy} < 0$. А лінія регресії 3 показує, що величини X і Y лінійно незалежні, при цьому $r_{xy} = 0$.

Якщо лінії регресії є прямими, то їх рівняння мають вигляд:

$$\boxed{a_{y/x} = Ax + B}; \quad \boxed{a_{x/y} = Cy + D},$$

де $\boxed{A = r_{xy}\,\sigma_y / \sigma_x}$; $\boxed{B = a_y - A a_x}$; $\boxed{C = r_{xy}\,\sigma_x / \sigma_y}$; $\boxed{D = a_x - C\,a_y}$.

Прямі регресії проходять через центр (a_x, a_y) сумісного розподілу величин X і Y.

1.5. Закон великих чисел. Граничні теореми

Нехай у ході статистичного експерименту визначаються значення деякої випадкової величини X. При однократному випробуванні не можна заздалегідь передбачити, яке з можливих значень прийме величина X. Проте при багатократному повторенні досліду середнє арифметичне величини X майже втрачає випадковий характер і наближається до деякого сталого значення.

Закон великих чисел – це сукупність теорем, що визначають умови прямування середніх арифметичних значень випадкових величин до відповідних констант при проведенні великого числа n ($n > 100...1000$) дослідів. Самими відомими серед них є теореми

Чебишова і Бернуллі.

Нерівність Чебишова. *Для довільної випадкової величини* X *з математичним сподіванням* $M(X)$ *і дисперсією* $D(X)$ *справедлива нерівність*

$$\boxed{P\left(|X - M(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}},$$

де ε *– довільне додатне число.* Іншими словами, *абсолютне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання не менше* ε *з імовірністю, що не перевищує відношення дисперсії цієї випадкової величини до квадрата* ε.

Приклад 1. Оцінити ймовірність, що випадкова величина X прийме значення за межами інтервалу $(a_x - \varepsilon, a_x + \varepsilon)$, де $\varepsilon = 3\sigma_x$.

□ Оскільки $\sigma_x^2 = D(X)$, з нерівності Чебишова при $\varepsilon = 3\sigma_x$ маємо

$$P\left(|X - a_x| \geq 3\sigma_x\right) \leq \frac{\sigma_x^2}{9\sigma_x^2} = \frac{1}{9}. \quad \blacksquare$$

Зауваження 1. Нерівність Чебишова дає тільки верхню оцінку, що не залежить від закону розподілу, для ймовірності абсолютного відхилення $|X - a_x|$.

Послідовність випадкових величин X_n, $n = 1, 2, \ldots$ збігається за ймовірністю до випадкової величини X, якщо ймовірність того, що X_n відрізняється від X на довільне скінченне число прямує до нуля при $n \to \infty$:

$$\boxed{X_n \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} X}, \text{ якщо } \lim_{n\to\infty} P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right) = 0 \text{ для довільного } \varepsilon > 0.$$

Теорема Чебишова. *Нехай проведено* n *однакових незалежних випробувань, у яких випадкова величина* X *прийняла відповідно значення* x_1, x_2, …, x_n. *При необмеженому збільшенні числа* n *випробувань середнє арифметичне* $\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i$ *значень випадкової величини* X *збігається за ймовірністю до її математичного сподівання*

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} M(X)},$$

тобто *для довільного додатного* ε *справджується рівність*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} P\left(|\bar{x} - a_x| < \varepsilon\right) = 1}.$$

Зауваження 2. Хоча співвідношення $|\bar{x} - a_x| < \varepsilon$ не є достовірним, проте за теоремою Чебишова якщо число випробувань n досить велике, то ймовірність його виконання близька до 1, наприклад, 0,99 чи 0,999, що означає його ***практичну вірогідність***. Тобто, невідоме *математичне сподівання випадкової величини* X *практично можна замінити середнім арифметичним значенням* $\boxed{a_x \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$, отриманим за результатами досить великої кількості випробувань. При цьому, чим більше n, тим з більшою ймовірністю, що наближається до 1, можна очікувати, що абсолютна похибка $|\bar{x} - a_x|$ такої заміни не перевищить задану величину ε.

Наприклад, нехай проводиться серія з n вимірювань деякого показника x, причому: а) результат кожного вимірювання не залежить від результатів інших, тобто всі результати X_1, X_2, …, X_n є попарно незалежними випадковими величинами; б) вимірювання проводяться без систематичних похибок (їх математичні сподівання рівні між собою і дорівнюють істинному значенню a вимірюваної величини x); в) забезпечена певна точність вимірювань, тобто дисперсії випадкових величин X_1, X_2, …, X_n рівномірно обмежені. Тоді при достатньо великій кількості n вимірювань їх середнє арифметичне виявиться скільки завгодно близьким до істинного значення a величини x.

Теорема Бернуллі. *Нехай проведено* n *однакових незалежних випробувань, у кожному з яких можлива поява події* A *з імовірністю* $P(A)$, *і в результаті подія* A *відбулася* m *раз. Тоді при необмеженому зростанні числа випробувань* n ($n \to \infty$) *відносна частота* $W_n(A) = m/n$ *появи події* A *збігається за ймовірністю до її ймовірності* $P(A)$:

$$\boxed{W_n(A) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \mathrm{P}(A)}.$$

Іншими словами, *при* $n \to \infty$ *відносна частота випадкової події* A *з імовірністю, що прямує до 1, необмежено зближується з імовірністю цієї події* A:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(\left|W_n(A) - \mathrm{P}(A)\right| < \varepsilon\right) = 1},$$

де ε *– довільне (як завгодно мале) фіксоване додатне число.*

Відомо, що на практиці дуже поширеним є нормальний розподіл. Пояснення цього феномену дає

центральна гранична теорема (у формі Ляпунова). *Нехай* X_1, X_2, …, X_n *– незалежні випадкові величини з приблизно однаковими дисперсіями* $D(X_i) \approx D$, $i = 1, 2, ..., n$. *Тоді при необмеженому зростанні* n ($n \to \infty$) *закон розподілу їх суми* $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *необмежено наближається до нормального закону*

$$F(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-(u-a_y)^2/(2\sigma_y^2)}\, du$$

з параметрами $a_y = \sum_{i=1}^{n} M(X_i)$ *і* $\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}$.

Зауваження 3. Вимога $D(X_i) \approx D$, $i = 1, 2, ..., n$ означає, що ні один з доданків не носить домінуючого характеру (вплив всіх X_i, $i = 1, 2, ..., n$ на суму Y приблизно однаковий). Таким чином, нормальний розподіл виникає тоді, коли підсумовується багато незалежних (чи слабо залежних) випадкових величин, рівень впливу кожної з яких на розсіювання суми має однаковий (рівномірно малий) порядок. На практиці така ситуація спостерігається досить часто, оскільки у випадку більш суттєвого впливу деякої величини X_i на суму Y звичайно приймаються спеціальні заходи для усунення відповідної головної причини розсіювання Y.

Зауваження 4. У реальних обставинах при підсумовуванні величин X_i, $i=1,2,...,n$ з однаковим законом розподілу, що характеризується математичним сподіванням $M(X_i)=a_x$, $i=1,2,...,n$ і дисперсією $D(X_i)=\sigma_x^2$ X_i, $i=1,2,...,n$, закон розподілу їх суми $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$ можна вважати приблизно нормальним за умови $n>20\ ...\ 50$. При цьому $a_y = n\,a_x$ і $\sigma_y=\sigma_x\sqrt{n}$, .

<u>Приклад 2</u>. Незалежні випадкові величини X_i, , $i=1,2,...,n$ $n=100$ розподілені рівномірно на відрізку $[0;1]$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ x<0; \\ x, \ 0\le x\le 1; \\ 1, \ x>1. \end{cases}$$

Знайти наближено інтегральну функцію розподілу $F(y)$ їх суми $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i$, а також ймовірність того, що $45<Y<70$.

□ Оскільки $n=100>50$, то випадкова величина Y має приблизно нормальний розподіл $F(y)=\dfrac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{y} e^{-(u-a_y)^2/(2\sigma_y^2)}\,du$ з параметрами $a_y=n\,a_x$ і $\sigma_y=\sigma_x\sqrt{n}$.

Для рівномірного розподілу дістанемо:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0, \ x<0; \\ 1, \ 0\le x\le 1; \\ 0, \ x>1; \end{cases} \quad m_x=M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1} x\cdot 1dx = x^2/2)\Big|_0^1=1/2\,;\ \ \sigma_x^2=D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2\ f(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(x-1/2)^2\cdot 1dx=(x-1/2)^3/3\Big|_0^1=1/12\,.$$

Тоді

$$a_y = n a_x = 100 \cdot 1/2 = 50\,; \;\; \sigma_y = \sigma_x \sqrt{n} = \sqrt{1/12} \cdot \sqrt{100} = 5\sqrt{3}\big/3\,.$$

Отже, $F(y) = \dfrac{3}{5\sqrt{6\pi}} \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-3(u-50)^2/50}\, du\,.$

Далі за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\big((\beta - a_x)/\sigma_x\big) - \Phi\big((\alpha - a_x)/\sigma_x\big)$$

знайдемо ймовірність влучення випадкової величини Y в заданий діапазон $(\alpha;\beta) = (45;70)$, $\alpha < \beta$:

$$P(45 < Y < 70) \approx \Phi\left(\frac{70-50}{5\sqrt{3}\big/3}\right) - \Phi\left(\frac{45-50}{5\sqrt{3}\big/3}\right) = \Phi(4\sqrt{3}) -$$

$$-\Phi(-\sqrt{3}) = \Phi(4\sqrt{3}) + \Phi(\sqrt{3}) \approx \Phi(6{,}928) + \Phi(1{,}732) \approx$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}458 \approx 0{,}958\,. \;\; \blacksquare$$

1.6. Контрольні запитання до змістового модулю “Теорія ймовірностей”

1. Дайте визначення випадкової (стохастичної) події.
2. Які події називаються: неможливими? достовірними? рівноможливими? несумісними? протилежними? Наведіть приклади.
3. Чи є протилежні події несумісними?
4. Чи є несумісні події протилежними?
5. Дайте визначення ймовірності випадкової події.
6. Як визначити ймовірність події класичним методом?
7. Що розуміють під повною групою подій? Наведіть приклади.
8. Як пов'язані між собою ймовірність і відносна частота появи події?
9. Як визначити ймовірність суми сумісних подій?
10. Наведіть приклади залежних і незалежних подій.
11. Що розуміють під умовною ймовірністю події?
12. Як визначається ймовірність добутку двох подій?
13. Наведіть формулу повної ймовірності.
14. Яке призначення формули Байєса?
15. Запишіть формулу Байєса. У чому її прикладне значення?

16. Який зв'язок між формулою Байєса і формулою повної ймовірності?
17. Які комбінаторні з'єднання розрізнюють у комбінаториці?
18. Дайте означення комбінаторного поняття “перестановка з n елементів”.
19. Яким способом обчислюється загальна кількість перестановок з n елементів?
20. Дайте означення комбінаторного поняття “розміщення з n елементів по m”.
21. Яким способом обчислюється загальна кількість розміщень з n елементів по m?
22. Дайте визначення комбінаторного поняття “сполучення з n елементів по m”.
23. Яким способом обчислюється загальна кількість сполучень з n елементів по m?
24. В яких випадках для визначення ймовірності застосовується формула Бернуллі?
25. Дайте визначення найімовірнішого числа появ події. Як його обчислити у випадку серії експериментів за схемою Бернуллі?
26. Наведіть локальну та інтегральну формули Лапласа.
27. В яких випадках замість формули Бернуллі застосовуються локальна й інтегральна формули Лапласа?
28. В яких випадках замість формули Бернуллі використовується формула Пуассона?
29. У випадку серії експериментів за схемою Бернуллі за якою формулою можна наближено оцінити ймовірність того, що відхилення відносної частоти $W_n(A)$ від ймовірності p за модулем не перевищує заданого додатного числа ε?
30. Чи можна стверджувати, що функція Гаусса є симетричною відносно осі ординат?
31. Чи можна стверджувати, що функція Лапласа є центрально симетричною відносно початку системи координат?
32. Дайте означення випадкової величини.
33. Яка випадкова величина називається дискретною? Наведіть приклади.
34. Яка випадкова величина називається неперервною? Наведіть приклади.

35. В яких формах може бути поданий закон розподілу випадкової величини?
36. Чи може функція розподілу бути: більшою одиниці? Від'ємною? Спадною?
37. Чому дорівнює ймовірність конкретного значення неперервної випадкової величини?
38. Що розуміють під щільністю розподілу неперервної випадкової величини?
39. Перелічіть властивості щільності розподілу.
40. Як, виходячи з ряду розподілу, знайти значення функції розподілу дискретної випадкової величини?
41. Як знайти ймовірність влучення випадкової величини в заданий діапазон, якщо відома функція розподілу? Щільність розподілу?
42. Дайте геометричну інтерпретацію ймовірності влучення неперервної випадкової величини на заданий проміжок.
43. Назвіть основні числові характеристики випадкових величин.
44. За якою формулою знаходиться математичне сподівання дискретної випадкової величини? Неперервної випадкової величини?
45. Чи є математичне сподівання випадковою величиною?
46. Чи є дисперсія випадковою величиною?
47. Як математичне сподівання і дисперсія характеризують випадкову величину?
48. Чим зручніше застосування середнього квадратичного відхилення для характеристики розсіювання замість дисперсії?
49. У чому полягає статистичний зміст параметрів a і σ нормального закону розподілу?
50. Як змінюється графік нормального закону зі зміною середнього квадратичного відхилення?
51. Дайте означення моди і медіани випадкової величини. Як мода і медіана характеризують випадкову величину?
52. Для симетричного унімодального закону розподілу випадкової величини значення математичного сподівання, моди і медіани збігаються. Чи справедливе обернене твердження?
53. Що характеризує та як визначається коефіцієнт асиметрії?
54. Чому дорівнює коефіцієнт асиметрії нормально розподіленої випадкової величини?

55. Як визначається ексцес (коефіцієнт гостровершинності) і що він характеризує?
56. Чому дорівнює ексцес нормально розподіленої випадкової величини?
57. За якими формулами знаходять математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що має біноміальний розподіл?
58. За якими формулами знаходять математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що має розподіл Пуассона?
59. Наведіть формули для обчислення математичного сподівання і дисперсії рівномірно розподіленої випадкової величини.
60. За якими формулами знаходять математичне сподівання і дисперсію випадкової величини, що має експоненціальний (показниковий) розподіл?
61. Чому дорівнює щільність розподілу випадкової величини, що описується нормальним законом?
62. Як визначити ймовірність влучення нормально розподіленої випадкової величини в заданий діапазон?
63. Як знайти ймовірність того, що відхилення нормально розподіленої випадкової величини X від її математичного сподівання $x = a$ за модулем менше заданого додатного числа δ?
64. Що таке багатомірна випадкова величина?
65. Що таке функція сумісного розподілу двох випадкових величин? Перелічіть її властивості.
66. Як визначаються математичне сподівання і дисперсія системи двох випадкових величин?
67. Як визначаються умовні математичні сподівання у випадку системи двох випадкових величин X і Y?
68. Що характеризує кореляційний момент системи двох випадкових величин?
69. Для чого використовується коефіцієнт кореляції?
70. Поясніть значення термінів: регресія, рівняння регресії, лінія регресії.
71. Що розуміють під законом великих чисел? Яка його роль у теорії ймовірностей?
72. Наведіть нерівність Чебишова і поясніть її зміст.
73. Сформулюйте теорему Чебишова і поясніть її практичний зміст.
74. Сформулюйте теорему Бернуллі і поясніть її практичний зміст.
75. Що стверджує центральна гранична теорема?

Змістовий модуль 2.

МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

2.1. Основні задачі математичної статистики. Генеральна та вибіркова статистичні сукупності. Варіаційний ряд

Математична статистика, спираючись на методи теорії ймовірностей, займається встановленням закономірностей, яким підкоряються масові однорідні випадкові явища, на основі збору, систематизації і обробки статистичних даних, одержаних у результаті спостережень, з метою формування обґрунтованих наукових і практичних висновків в умовах стохастичної невизначеності.

Предмет математичної статистики складають методи реєстрації, опису й аналізу статистичних експериментальних даних, які можна подати як сукупність значень одно- чи багатовимірної випадкової величини, що дозволяє застосовувати апарат теорії ймовірностей. У свою чергу, математична статистика служить основою для створення методів обробки й аналізу статистичного матеріалу в різних конкретних сферах людської діяльності.

Основні задачі математичної статистики:

1) визначення способів збору, групування й опису статистичних даних;

2) розробка методів аналізу одержаних даних у залежності від мети дослідження:

а) оцінка невідомої ймовірності події; оцінка невідомої функції розподілу; оцінка параметрів розподілу відомого вигляду; оцінка залежності між випадковими величинами і т.п.;

б) перевірка правдоподібності статистичних гіпотез про вигляд невідомого розподілу чи про значення параметрів відомого розподілу.

Множину всіх статистично однорідних об’єктів, що досліджується відносно деякого якісного чи кількісного показника – випадкової величини X, називають ***генеральною сукупністю***. Число N всіх об’єктів, що утворюють генеральну сукупність, називають її ***об’ємом***.

<u>Зауваження 1</u>. Об’єм генеральної сукупності може бути нескінченним.

Часто суцільне дослідження всіх об'єктів генеральної сукупності неприйнятне, оскільки фізично складне, економічно затратне чи викликає їх пошкодження. У таких випадках з генеральної сукупності відбирають для дослідження лише деяку частину об'єктів, а одержані висновки поширюють на всю генеральну сукупність.

Вибірковою сукупністю або просто ***вибіркою*** називають підмножину об'єктів генеральної сукупності. Число n всіх об'єктів, що утворюють вибірку, називають її ***об'ємом***.

Метод статистичного дослідження, за яким на базі вивчення вибірки робиться висновок про всю генеральну сукупність, називають ***вибірковим методом***. Він служить одним з основних підходів до вивчення випадкових явищ у математичній статистиці.

Для достовірності суджень за даними вибірки про всю генеральну сукупність необхідно, щоб вибірка правильно відображала властивості генеральної сукупності, тобто була ***репрезентативною*** (***представницькою***). Виходячи з закону великих чисел, для цього вибірка повинна бути ***випадковою***, тобто складатися з випадково відібраних об'єктів генеральної сукупності.

Випадковий відбір передбачає, що кожний об'єкт генеральної сукупності має однакову ймовірність потрапити у вибірку.

Вибірка може бути ***повторною***, коли відібраний об'єкт (перед відбором наступного) повертається в генеральну сукупність, і ***безповторною***, коли відібраний об'єкт не повертається в генеральну сукупність.

Застосовують різні ***способи відбору***:

1) ***простий відбір*** – випадкове вилучення об'єктів генеральної сукупності з поверненням чи ні;

2) ***типовий відбір***, коли об'єкти вилучаються не з усієї генеральної сукупності, а лише з її "типової" частини;

3) ***серійний відбір*** – об'єкти вибирають з генеральної сукупності не по одному, а серіями;

4) ***механічний відбір*** – генеральна сукупність "механічно" ділиться на стільки частин, скільки об'єктів повинно ввійти до вибірки, і з кожної частини вилучається один об'єкт.

<u>Зауваження 2</u>. Якщо об'єм генеральної сукупності досить великий, то відмінність між повторною і безповторною вибіркою зникає.

Одержані за вибіркою статистичні дані звичайно утворюють неупорядковану множину чисел x_i, $i=\overline{1,n}$ – значень випадкової величини X, яку називають ***первинною статистичною сукупністю***. Цей безлад ускладнює виявлення закономірностей змінювання (***варіювання***) статистичних даних. Тому застосовують операцію ***ранжування***, при якій отримані значення випадкової величини X розміщують у порядку зростання.

Після ранжування наявні значення випадкової величини X групують так, щоб у кожній окремій групі значення випадкової величини було однаковим і відрізнялося від значень в усіх інших групах. Кожне таке значення називають ***варіантою***. Варіанта позначається малою літерою латинського алфавіту з індексом, що відповідає порядковому номеру групи: x_i, $i=\overline{1,k}$, де k – загальне число всіх варіант, $k \le n$.

Змінювання значень варіант називають ***варіюванням***. При ***дискретному*** варіюванні окремі значення варіант відрізняються одне від іншого на ту чи іншу скінченну величину. При ***неперервному*** варіюванні окремі значення варіант можуть відрізнятися одне від іншого на як завгодно малу величину.

Послідовність варіант, розміщених у зростаючому порядку, називають ***варіаційним рядом***: x_1, x_2, …, x_i, …, x_k, де $x_i < x_{i+1}$, $i=1,2,...,k-1$.

Різницю $\boxed{R_B = x_{\max} - x_{\min}}$, де $x_{\min}=x_1$ – найменша з варіант, а $x_{\max}=x_k$ – найбільша з варіант, називають ***розмахом*** варіаційного ряду. Відповідний відрізок $[x_{\min};x_{\max}]$ називають ***діапазоном значень*** ряду.

Приклад. Дана вибірка $\{2,4,7,3,9,1,1,9,3,\ 2,3,7,3,7\}$. Проранжувати її в порядку зростання. Знайти розмах. Записати відповідний дискретний варіаційний ряд.

□ Проведемо ранжування: $\{1,1,2,\ 2,3,\ 3,3,3,4,7,7,7,9,9\}$.

Визначимо розмах $R_B = x_{\max} - x_{\min} = 9-1=8$.

Далі запишемо варіаційний ряд: $1,2,3,4,7,9$, $k=6$. ■

2.2. Статистичний ряд. Оцінка закону розподілу

Число n_i, що показує, скільки разів зустрічається в сукупності статистичних даних відповідна варіанта x_i (тобто об'єм i-ї групи), називають ***частотою*** цієї варіанти. Сума всіх відносних частот дорівнює об'єму вибірки: $\boxed{\sum_{i=1}^{k} n_i = n}$.

Відношення $\boxed{W_i = n_i/n}$ частоти n_i даної варіанти x_i до загальної суми $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ частот всіх варіант (об'єму вибірки) називають ***відносною частотою*** i-ї варіанти. Сума всіх відносних частот дорівнює одиниці: $\boxed{\sum_{i=1}^{k} W_i = 1}$.

Дискретним статистичним рядом називають проранжовану в порядку зростання послідовність усіх варіант x_1, x_2, …, x_i, …, x_k з відповідно вказаними частотами n_1, n_2, …, n_i, …, n_k або відносними частотами W_1, W_2 …, W_i, …, W_k. Дискретний статистичний ряд зручно записувати у вигляді наступної таблиці.

i	1	2	…	k	
x_i	x_1	x_2	…	x_k	$\sum_{i=1}^{k}$
n_i	n_1	n_2	…	n_k	n
W_i	W_1	W_2	…	W_k	1

<u>Приклад</u>. Для варіаційного ряду, одержаного в прикладі з попереднього пункту, скласти дискретний статистичний ряд.

□ Проведемо обчислення частот і відносних частот. Дістанемо статистичний ряд:

i	1	2	3	4	5	6	
x_i	1	2	3	4	7	9	$\sum_{i=1}^{6}$
n_i	2	2	4	1	3	2	14
W_i	1/7	1/7	2/7	1/14	3/14	1/7	1

■

Якщо випадкова величина X є неперервною (чи дискретною з великим числом різних значень), то замість дискретного часто складають ***інтервальний статистичний ряд***. Для його побудови необхідно:

1) Увесь діапазон $[x_{\min}; x_{\max}] = [x_1; x_k]$ значень варіант розділити на m елементарних проміжків $[a_0; a_1)$, $[a_1; a_2)$, …, $[a_{m-2}; a_{m-1})$, $[a_{m-1}; a_m]$ з довжинами $h_i = a_i - a_{i-1}$, $i = \overline{1,m}$ так, що кінець попереднього служить початком наступного, причому $a_0 = x_1$ і $a_m = x_k$.

2) Знайти частоти n_i і відносні частоти $W_i = n_i / n$ попадання значень випадкової величини X в i-й частинний інтервал з кінцями a_{i-1} і a_i, $i = \overline{1,m}$.

3) Обчислити значення ***емпіричної щільності розподілу*** $\boxed{f^*(x) = W_i / h_i, \quad x \in [a_{i-1}; a_i)}$ – щільності відносної частоти W_i, $i = \overline{1,m}$.

4) Скласти відповідну таблицю

i	1	2	…	$m-1$	m	–
x_i	$[a_0; a_1)$	$[a_1; a_2)$	…	$[a_{m-2}; a_{m-1})$	$[a_{m-1}; a_m]$	$\sum_{i=1}^{m}$
n_i	n_1	n_2	…	n_{m-1}	n_m	n
W_i	W_1	W_2	…	W_{m-1}	W_m	1
W_i/h_i	W_1/h_1	W_2/h_2	…	W_{m-1}/h_{m-1}	W_m/h_m	–

Зауваження 1. Надалі обмежимося розглядом тільки розбиття на елементарні проміжки однакової довжини $h_i = h = (x_k - x_1)/m$, $i = \overline{1,m}$. Тоді $a_0 = x_1$ і $a_i = a_{i-1} + h = x_1 + ih$, $i = \overline{1,m}$.

Зауваження 2. При групуванні даних з метою побудови інтервального статистичного ряду виникає питання раціонального вибору числа m елементарних інтервалів. Для цього рекомендується наближені співвідношення:

$$\boxed{m \approx \operatorname{int}(n^{1/2}), \quad n \le 100} \text{ або } \boxed{m \approx \operatorname{int}(1 + 3{,}322 \lg n), \quad n > 100},$$

де $\operatorname{int}(x)$ – ціла частина дійсного числа x. Бажано вибрати m так, щоб n націло ділилось на m.

Для дискретної випадкової величини X відносна частота W_i служить статистичною оцінкою за вибіркою ймовірності появи відповідної варіанти x_i. Тому дискретний статистичний ряд з наведеними значеннями відносної частоти W_i служить наближеним поданням ряду розподілу величини X.

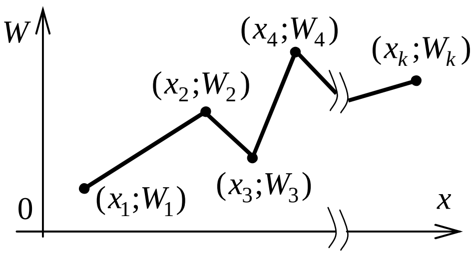


Рис. 34

У прямокутній системі координат Oxy ламану з вершинами $(x_i;W_i)$, $i=\overline{1,k}$ називають ***полігоном відносних частот*** (рис. 34). Він є статистичним емпіричним аналогом многокутника розподілу.

Аналогічно, для неперервної випадкової величини X інтервальний статистичний ряд з наведеними значеннями емпіричної щільності $f^*(x)=W_i/h_i$, $x\in[a_{i-1};a_i)$, $i=\overline{1,m}$ служить наближеним поданням щільності розподілу $f(x)$ величини X. У прямокутній системі координат Oxy східчасту фігуру, складену з m елементарних прямокутників, у кожного з яких основою служить відповідний частинний інтервал з кінцями a_{i-1} і a_i, а висота дорівнює відповідному значенню $\boxed{f^*(x)=W_i/h}$ щільності відносної частоти W_i, $i=\overline{1,m}$, називають ***гістограмою відносних частот*** (рис. 35). Вона є статистичним емпіричним аналогом графіка щільності розподілу.

Наближеною оцінкою інтегральної функції розподілу служить ***емпірична функція розподілу*** $F^*(x)$, що за вибіркою для кожного значення x визначає відносну частоту події $X<x$. Щоб знайти $F^*(x)$, треба підрахувати число варіант $n(x)$, у яких випадкова величина X прийняла значення, менші x. Тоді $\boxed{F^*(x)=n(x)/n}$.

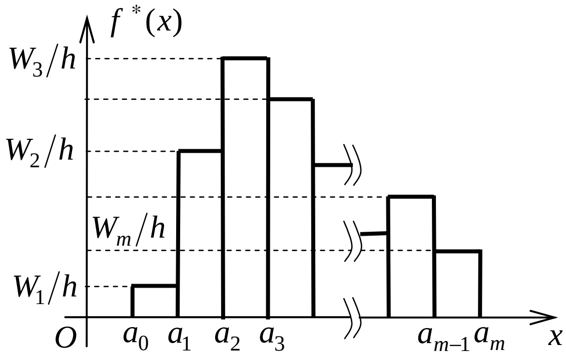


Рис. 35

За теоремою Бернуллі зі збільшенням об'єму вибірки n при будь-якому x відносна частота події $X < x$ збігається за ймовірністю до ймовірності цієї події. Отже, при необмеженому зростанні n ($n \to \infty$) емпірична функція розподілу $F^*(x)$ збігається за ймовірністю до істинної функції розподілу $F(x)$ випадкової величини X.

У прямокутній системі координат Oxy графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ називають ***кумулятивною кривою*** (***кумулятою***).

У випадку дискретного статистичного ряду величина $F^*(x_i)$ для варіанти x_i є накопиченою відносною частотою, що утворюється підсумовуванням відносних частот всіх варіант, що передують даній: $\boxed{F^*(x_i) = \sum_{j=1}^{i-1} W_j}$. Кумулятою служить кусково-стала східчаста лінія, що задається співвідношенням:

$$\boxed{F^*(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in (-\infty; x_1]; \\ \sum_{j=1}^{i-1} W_j, \ x \in (x_{i-1}; x_i], \ i = \overline{2,k}; \\ 1, \quad x \in (x_k; +\infty). \end{cases}}$$

Для будь-якої випадкової величини X – дискретної чи неперервної – кумулята є розривною кусково-сталою східчастою лінією, скінченні стрибки якої відповідають значенням варіант і за величиною дорівнюють їх відносним частотам. Якщо X – неперервна величина, то при збільшенні об'єму вибірки n число стрибків збільшується, а їх висоти зменшуються. При цьому графік емпіричної функції розподілу $F^*(x)$ необмежено наближається до неперервної кривої, що відповідає істинній функції розподілу $F(x)$.

2.3. Точкові статистичні оцінки числових характеристик випадкових величин

Кожній числовій характеристиці (параметру) θ розподілу випадкової величини X відповідає її ***статистична оцінка*** θ_B – наближене значення, одержане за результатами спостережень x_i, $i=\overline{1,n}$ за вибіркою об'єму n, тобто відповідна ***вибіркова характеристика***.

Розрізняють точкові та інтервальні статистичні оцінки.

Точкова оцінка θ_B задається одним числом як деяка функція від n одержаних за вибіркою випадкових величин x_i, $i=\overline{1,n}$. Значення θ_B змінюються випадковим чином при переході від однієї вибірки до іншої. Тобто, значення вибіркових характеристик містять, на відміну від самих числових характеристик, елемент випадковості.

Інтервальна оцінка визначається двома числами θ_{B1} і θ_{B2} – кінцями ***довірчого інтервалу*** $(\theta_{B1};\theta_{B2})$, що з заданою надійністю γ накриває істинне значення θ. ***Надійністю*** (***довірчою ймовірністю***) інтервальної оцінки називають близьку до 1 ймовірність γ (наприклад, $\gamma=0{,}9$, $\gamma=0{,}95$ або $\gamma=0{,}99$), з якою ця оцінка відповідає істинному значенню θ, тобто ймовірність події $\theta\in(\theta_{B1};\theta_{B2})$. Значення γ вибирають таким, що подію з імовірністю γ можна вважати практично достовірною. Ймовірність α протилежної події $\theta\notin(\theta_{B1};\theta_{B2})$ називають ***рівнем значущості*** інтервальної оцінки. При цьому $\alpha=1-\gamma$.

Для якісної заміни істинного значення числової характеристики θ його наближеною точковою оцінкою θ_B остання повинна відповідати певним критеріям – спроможності, незміщеності та ефективності.

Оцінка θ_B називається ***спроможною***, якщо при необмеженому зростанні n ($n \to \infty$) вона збігається за ймовірністю до істинного значення θ: $\theta_B \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \theta$.

Спроможність – це мінімальна вимога до оцінки. Неспроможні оцінки не використовуються. Вимога спроможності оцінки страхує від появи грубих похибок при досить великих об’ємах вибірки.

Оцінка θ_B називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання $M(\theta_B)$ дорівнює істинному значенню θ при довільному об’ємі вибірки: $M(\theta_B) = \theta$, $\forall n$. Тобто, незміщена оцінка θ_B не містить систематичної похибки.

Незміщена оцінка θ_B є спроможною, якщо її дисперсія $D(\theta_B)$ задовольняє умові $\lim\limits_{n\to\infty} D(\theta_B) = 0$.

Інколи оцінка θ_B є ***асимптотично незміщеною***, тобто $M(\theta_B) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\to}} \theta$.

Вимога незміщеності особливо суттєва при малому об’ємі вибірки, оскільки усуває можливі систематичні похибки.

Оцінка θ_B називається ***ефективною***, якщо при заданому об'ємі вибірки вона має найменшу дисперсію $D(\theta_B)$ серед всіх можливих оцінок.

Вимога ефективності використовується для вибору оцінки з найменшим розсіюванням.

<u>Оцінка математичного сподівання</u>. *Незміщеною спроможною оцінкою математичного сподівання* $M(X)$ *випадкової величини* X *служить* ***вибіркове середнє*** $\overline{x}$ – середнє арифметичне всіх вибіркових значень x_i, $i = \overline{1,n}$: $\boxed{M(X) \approx \overline{x}}$.

Якщо всі значення x_i, $i = \overline{1,n}$ різні, то $\boxed{\overline{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{n} x_i}$.

Якщо кожне значення x_i має відповідну частоту n_i, $i=\overline{1,k}$, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то $\boxed{\bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_i\, x_i}$.

<u>Зауваження 1</u>. Вибіркове середнє $\bar{x}$ є ефективною оцінкою для $M(X)$, якщо випадкова величина X розподілена за нормальним законом.

<u>Оцінка дисперсії та середнього квадратичного відхилення</u>. *Спроможною оцінкою дисперсії* $D(X)$ *випадкової величини* X *служить* ***вибіркова дисперсія*** $D_B(X)$ – середнє арифметичне всіх квадратів відхилень вибіркових значень x_i, $i=\overline{1,n}$ від їх вибіркового середнього $\bar{x}$: $\boxed{D(X) \approx D_B(X)}$.

Якщо всі значення x_i, $i=\overline{1,n}$ різні, то

$$\boxed{D_B(X) = (1/n)\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2}.$$

Якщо кожне значення x_i має відповідну частоту n_i, $i=\overline{1,k}$, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то $\boxed{D_B(X) = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x})^2}$.

Вибірковим середнім квадратичним відхиленням $\sigma_B(X)$ називають квадратний корінь з вибіркової дисперсії $D_B(X)$: $\boxed{\sigma_B = \sqrt{D_B}}$. $\sigma_B(X)$ *служить спроможною оцінкою середнього квадратичного відхилення* $\sigma(X)$: $\boxed{\sigma(X) \approx \sigma_B(X)}$.

<u>Зауваження 2</u>. Вибіркова дисперсія $D_B(X)$ є зміщеною оцінкою для $D(X)$. *Незміщеною спроможною оцінкою дисперсії* $D(X)$ *служить* ***виправлена дисперсія*** $S^2(X)$, яка обчислюється за формулою $\boxed{S^2(X) = \big(n/(n-1)\big) D_B(X)}$. При достатньо великих n виправлена і вибіркова дисперсії мало відрізняються. Відповідно *незміщеною спроможною оцінкою середнього квадратичного відхилення* $\sigma(X)$ *служить* ***виправлене середнє квадратичне відхилення*** $S(X)$: $\boxed{S(X) = \sqrt{S^2(X)}}$.

Зауваження 3. Наведемо ще дві характеристики дискретного статистичного ряду з k варіантами x_1, x_2, …, x_k, що служать статистичними оцінками відповідних числових характеристик випадкової величини X:

1) ***Мода*** Mo_B – варіанта, що має найбільшу частоту.

2) ***Медіана*** Me_B – значення випадкової величини X, що відповідає середині ряду. При цьому: а) $Me_B = x_{(k+1)/2}$, якщо k – непарне число; б) $Me_B = (x_{k/2} + x_{k/2+1})/2$, якщо k – парне число.

Приклад. Вибірка задана дискретним статистичним рядом

i	1	2	3	4	5	6	7	
x_i	-4	-2	2	5	7	8	10	$\sum_{i=1}^{6}$
n_i	10	30	20	10	2	2	6	80

Знайти: вибіркове середнє $\overline{x}$, вибіркову дисперсію $D_B(X)$, вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_B(X)$, виправлену дисперсію $S^2(X)$, виправлене середнє квадратичне відхилення $S(X)$, моду Mo_B, медіану Me_B.

□ Число варіант $k = 7$, об'єм вибірки $n = 80$. Знайдемо

$$Mo_B = -2; \quad Me_B = x_{(k+1)/2} = x_{(7+1)/2} = x_4 = 5.$$

Проведемо обчислення інших характеристик:

$$\overline{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = (10\cdot(-4) + 30\cdot(-2) + 20\cdot 2 + 10\cdot 5 +$$

$$+ 2\cdot 7 + 2\cdot 8 + 6\cdot 10)/80 = 1; \quad D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2 =$$

$$= (10\cdot(-4-1)^2 + 30\cdot(-2-1)^2 + 20\cdot(2-1)^2 + 10\cdot(5-1)^2 +$$

$$+ 2\cdot(7-1)^2 + 2\cdot(8-1)^2 + 6\cdot(10-1)^2)/80 = 16{,}95;$$

$$\sigma_B(X) = \sqrt{D_B(X)} = \sqrt{16{,}95} = 4{,}117; \quad S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_B(X) =$$

$$=\big(80/(80-1)\big)\cdot 16{,}9=17{,}165; \quad S(X)=\sqrt{17{,}165}=4{,}143. \ ■$$

2.4. Інтервальні статистичні оцінки числових характеристик випадкових величин

Нехай для числової характеристики (параметра) θ розподілу випадкової величини X за результатами спостережень x_i, $i=\overline{1,n}$ за вибіркою об’єму n одержана незміщена точкова оцінка θ_B. Оцінимо можливу абсолютну похибку $\Delta=|\theta_B-\theta|$, що виникає при наближеній заміні істинного значення θ вибірковим θ_B.

Задамо достатній рівень довірчої ймовірності γ і знайдемо таке значення $\varepsilon>0$, для якого виконується рівність $P(\Delta<\varepsilon)=\gamma$. Тоді великі абсолютні похибки $\Delta>\varepsilon$ будуть з'являтися тільки з малою ймовірністю $\alpha=1-\gamma$. Враховуючи, що $\Delta=|\theta_B-\theta|$, і розкриваючи модуль, рівність $P(\Delta<\varepsilon)=\gamma$ можна подати у вигляді $P(\theta_B-\varepsilon<\theta<\theta_B+\varepsilon)=\gamma$. Це означає, що з імовірністю γ істинне значення θ потрапляє в довірчий інтервал $(\theta_B-\varepsilon;\,\theta_B+\varepsilon)$. Оскільки цей інтервал визначається за вибіркою і є випадковим, даний факт краще сформулювати так: *довірчий інтервал* $(\theta_B-\varepsilon;\,\theta_B+\varepsilon)$ *з імовірністю* γ *накриває істинне значення* θ.

Зауваження 1. Для побудови довірчого інтервалу необхідно розв’язати відносно ε рівняння $P(\Delta<\varepsilon)=\gamma$. А це потребує знання закону розподілу випадкової величини θ_B, який, в свою чергу, залежить від невідомого закону розподілу величини X, отже від його оцінюваних параметрів, у тому числі істинного значення θ. Практичне розв’язання цієї проблеми базується на використанні властивостей відповідної оцінки і певних припущень про характер розподілу величини X, що приводить до спеціальних розподілів (статистик), що відповідають тим чи іншим оцінкам.

Зауваження 2. Довірча ймовірність γ характеризує надійність інтервальної оцінки: чим більше значення γ, тим рідше довірчий інтервал не накриватиме істинне значення параметра. Довжина довірчого інтервалу 2ε характеризує якість цієї оцінки. Об'єм n використаних для одержання оцінки статистичних даних характеризує її вартість. При фіксованій вартості підвищення якості інтервальної оцінки призводить до зниження її надійності. Підвищення надійності оцінки при збереженні якості вимагає збільшення вартості.

Зауваження 3. Інколи застосовують односторонні довірчі інтервали, межі яких визначаються з умови $P(\theta_B - \varepsilon < \theta) = \gamma$ або $P(\theta < \theta_B + \varepsilon) = \gamma$.

Довірчий інтервал для математичного сподівання та дисперсії.

1) Нехай закон розподілу випадкової величини X невідомий. Відповідно до центральної граничної теореми, закон розподілу вибіркової середньої $\overline{x}$ – точкової оцінки математичного сподівання $a = M(X)$ – близький до нормального з параметрами $a_B = a$ і $\sigma_B = \sigma(X)/\sqrt{n}$. Довірчі інтервали з надійністю γ для математичного сподівання $a = M(X)$ і дисперсії $D(X) = \sigma^2$ мають вигляд:

$$\boxed{\overline{x} - S(X)z_{кр}\big/\sqrt{n} < a < \overline{x} + S(X)z_{кр}\big/\sqrt{n}};$$

$$\boxed{S^2(X)\left(1 - z_{кр}\sqrt{2/(n-1)}\right) < D(X) < S^2(X)\left(1 + z_{кр}\sqrt{2/(n-1)}\right)},$$

де $z_{кр}$ – відповідне значення аргументу функції Лапласа, що визначається зі співвідношення $\boxed{\Phi(z_{кр}) = \gamma/2}$. (Величина $z_{кр}$ є квантилем порядку $(1+\gamma)/2$ стандартного нормального розподілу $F^*(x) = 1/2 + \Phi(x)$ з параметрами $a = 0$ і $\sigma = 1$).

2) Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з невідомими параметрами a і σ. Довірчий інтервал з надійністю γ для математичного сподівання $a = M(X)$ має вигляд:

$$\boxed{\overline{x} - S(X)t_{кр}\big/\sqrt{n} < a < \overline{x} + S(X)t_{кр}\big/\sqrt{n}},$$

де $\boxed{t_{кр} = t_{\alpha,k}}$ – відповідне значення, взяте з таблиці критичних точок ***розподілу Стьюдента*** з $k = n-1$ ступенями свободи для випадку двосторонньої критичної області; $\alpha = 1-\gamma$ – рівень значущості.

Довірчий інтервал з надійністю γ для дисперсії $D(X)=\sigma^2$ має вигляд:

$$\boxed{(n-1)S^2(X)\big/\chi^2_{кр2}<D(X)<(n-1)S^2(X)\big/\chi^2_{кр1}},$$

де $\boxed{\chi^2_{кр1}=\chi^2_{(1+\gamma)/2,k}}$ і $\boxed{\chi^2_{кр2}=\chi^2_{(1-\gamma)/2,k}}$ – відповідні значення, взяті з таблиці критичних точок χ^2 ***-розподілу*** з $k=n-1$ ступенями свободи.

Приклад 1. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з невідомими параметрами a і σ. За вибіркою об'єму $n=25$ знайдено її вибіркове середнє $\overline{x}=-1{,}74$ і виправлене середнє квадратичне відхилення $S(X)=0{,}83$. Визначити довірчі інтервали з надійністю $\gamma=0{,}95$ для математичного сподівання $a=M(X)$ і дисперсії $D(X)$.

□ Маємо: $k=n-1=25-1=24$ – число ступенів свободи; $\alpha=1-\gamma=1-0{,}95=0{,}05$ – рівень значущості.

Користуючись таблицею критичних точок розподілу Стьюдента з k ступенями свободи для випадку двосторонньої критичної області, знаходимо: $t_{кр}=t_{\alpha,k}=t_{0,05;24}=2{,}06$. Далі проводимо обчислення довірчого інтервалу для математичного сподівання:

$$-1{,}74-0{,}83\cdot 2{,}06\big/\sqrt{25}<a<-1{,}74+0{,}83\cdot 2{,}06\big/\sqrt{25};$$

$$-2{,}08<a<-1{,}40.$$

Користуючись таблицею критичних точок χ^2-розподілу з k ступенями свободи знаходимо:

$$\chi^2_{кр1}=\chi^2_{(1+\gamma)/2,k}=\chi^2_{(1+0{,}95)/2,24}=\chi^2_{0{,}975;24}=12{,}4;$$

$$\chi^2_{кр2}=\chi^2_{(1-\gamma)/2,k}=\chi^2_{(1-0{,}95)/2,24}=\chi^2_{0{,}025;24}=39{,}4.$$

Далі проводимо обчислення довірчого інтервалу для дисперсії:

$$(25-1)\cdot 0{,}83^2\big/39{,}4<D(X)<(25-1)\cdot 0{,}83^2\big/12{,}4;$$

$$0{,}42<D(X)<1{,}33. \qquad ■$$

Зауваження 4. Відомо, що χ^2-розподіл при $n \to \infty$ необмежено наближається до нормального. Тому при достатньо великому об'ємі вибірки $(n \geq 50)$ довірчий інтервал для дисперсії можна знайти так:

$$S^2(X)\Big/\left(1+z_{кр}\Big/\sqrt{2n}\right)^2 < D(X) < S^2(X)\Big/\left(1-z_{кр}\Big/\sqrt{2n}\right)^2 .$$

3) Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з відомим параметром σ (середнім квадратичним відхиленням). Тоді довірчий інтервал з надійністю γ для математичного сподівання $a = M(X)$ має вигляд:

$$\boxed{\bar{x} - \sigma z_{кр}\Big/\sqrt{n} < a < \bar{x} + \sigma z_{кр}\Big/\sqrt{n}}.$$

Приклад 2. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом з відомим середнім квадратичним відхиленням $\sigma = 1{,}37$. За вибіркою об'єму $n = 64$ знайдено її вибіркове середнє $\bar{x} = 5{,}82$. Визначити довірчий інтервал з надійністю $\gamma = 0{,}99$ для математичного сподівання $a = M(X)$.

□ Зі співвідношення $\Phi(z_{кр}) = \gamma/2 = 0{,}99/2 = 0{,}495$ за таблицею функції Лапласа знаходимо $z_{кр} = 2{,}58$. Далі проводимо обчислення довірчого інтервалу:

$$5{,}82 - 1{,}37 \cdot 2{,}58\Big/\sqrt{64} < a < 5{,}82 + 1{,}37 \cdot 2{,}58\Big/\sqrt{64};$$

$$5{,}38 < a < 6{,}26 . \quad \blacksquare$$

2.5. Статистичне дослідження залежностей

Нехай у результаті спостережень над вибіркою об'єму n одержана неупорядкована первинна статистична сукупність значень (x_i, y_i), $i = \overline{1,n}$ двовимірної випадкової величини (X, Y). При цьому одне й те ж значення x_i або y_j, чи пара (x_i, y_j) можуть зустрічатися декілька разів. Тому первинні статистичні дані звичайно упорядковують, групують і формують так звану ***кореляційну таблицю***:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k	$n(y)$
y_1	q_{11}	q_{21}	$\dots$	q_{i1}	$\dots$	q_{k1}	n_1
y_2	q_{12}	q_{22}	$\dots$	q_{i2}	$\dots$	q_{k2}	n_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_j	q_{1j}	q_{2j}	$\dots$	q_{ij}	$\dots$	q_{kj}	n_j
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_l	q_{1l}	q_{2l}	$\dots$	q_{il}	$\dots$	q_{kl}	n_l
$m(x)$	m_1	m_2	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k	n

Тут x_1, x_2, …, x_i, …, x_k – розміщені в порядку зростання різні між собою значення випадкової величини X; k – кількість різних значень X; y_1, y_2, …, y_j, …, y_l – розміщені в порядку зростання різні між собою значення випадкової величини Y; l – кількість різних значень Y; m_i – частота появи значення x_i; n_j – частота появи значення y_j; q_{ij} – частота появи пари (x_i, y_j). При цьому $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$; $\sum_{j=1}^{l} n_j = n$; $\sum_{i,j} q_{ij} = n$.

Кореляційна таблиця є вибірковим аналогом матриці розподілу, що відображає теоретичний закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини (X, Y).

Статистична обробка наведених у кореляційній таблиці вибіркових даних про двовимірну випадкову величину (X, Y) включає стандартні процедури оцінки й аналізу параметрів окремих складових X і Y як одновимірних величин (відповідні підходи розглянуті вище), а також відповідні розрахунки оцінок й аналіз параметрів, притаманних тільки двовимірним випадковим величинам. Звичайно визначаються наступні оцінки числових характеристик двовимірної випадкової величини (X, Y).

Оцінки математичних сподівань:

$$\boxed{M(X) \approx \bar{x} = (1/n)\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}; \quad \boxed{M(Y) \approx \bar{y} = (1/n)\sum_{j=1}^{l} n_j y_j}.$$

Оцінки дисперсій:

$$\boxed{D(X) \approx D_B(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i (x_i - \bar{x})^2 \text{ ; } D(X) \approx S^2(X) = \frac{n}{n-1} D_B(X)};$$

$$\boxed{D(Y) \approx D_B(Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_j (y_j - \bar{y})^2 \text{ ; } D(Y) \approx S^2(Y) = \frac{n}{n-1} D_B(Y)}.$$

Оцінки умовних математичних сподівань:

$$\boxed{a_{x/y_j} = M(X / y_j) \approx \bar{x}(y_j)}, \quad j = \overline{1, l} \text{ ;}$$

$$\boxed{a_{y/x_i} = M(Y / x_i) \approx \bar{y}(x_i)}, \quad i = \overline{1, k} \text{ ,}$$

де $\bar{x}(y_j)$ і $\bar{y}(x_i)$ – ***умовні вибіркові середні***:

$$\boxed{\bar{x}(y_j) = \frac{1}{n_j}\sum_{i} x_i q_{ij}}; \qquad \boxed{\bar{y}(x_i) = \frac{1}{m_i}\sum_{j} y_j q_{ij}}.$$

Оцінка коефіцієнта кореляції: $\boxed{r_{xy} \approx r_B}$,

де r_B – ***вибірковий коефіцієнт кореляції***: $\boxed{r_B = \dfrac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sigma_B(X) \cdot \sigma_B(Y)}}$.

Тут $\overline{xy}$ – ***вибіркове змішане середнє***: $\boxed{\overline{xy} = (1/n)\sum_{i,j} x_i y_j q_{ij}}$.

Сумісне дослідження випадкових величин X і Y є предметом ***кореляційного аналізу***. Його мета – визначення форми залежності між величинами X і Y та тісноти зв'язку між ними, тобто одержання емпіричної оцінки $\bar{y}(x)$ умовного математичного сподівання $a_{y/x}$ як деякої функції від x: $\bar{y}(x) = \varphi(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ – вибіркової оцінки регресії Y на X (або, навпаки, регресії X на Y). Тут $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ – невідомі параметри.

Для цього необхідно, по-перше, провести ***структурну ідентифікацію*** залежності $\bar{y}(x) = \varphi(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$ – встановити клас, з якого вибирається функція $\varphi(x, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_m)$, тобто вияснити, чи є вона лінійною, квадратичною, логарифмічною, показниковою і т.д.; по-друге, провести ***параметричну ідентифікацію*** залежності $\overline{y}(x)=\varphi(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ – визначити значення невідомих коефіцієнтів $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$ функції $\varphi(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ з вибраного класу.

Для визначення типу залежності $\overline{y}(x)=\varphi(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ часто використовуються геометричні міркування: за кореляційною таблицею в прямокутній системі координат будується ***діаграма розсіювання*** (***кореляційне поле***) – множина точок (x_i,y_i), $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,l}$ (рис. 36). Аналізуючи вигляд діаграми розсіювання, вибирають тип ***емпіричної*** (***вибіркової***) ***лінії регресії*** $\overline{y}(x)=\varphi(x,\theta_1,...,\theta_m)$, що повинна проходити через множину вибіркових точок так, щоб її графік найкращим чином відповідав невідомій істинній лінії регресії, тобто її значення повинні приблизно дорівнювати середнім арифметичним $\overline{y}(x)$ значень випадкової величини Y для кожного значення $X=x$.

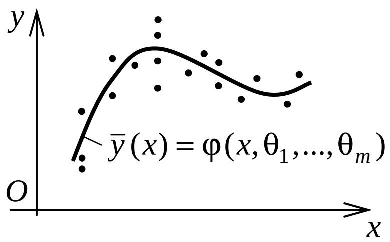


Рис. 36

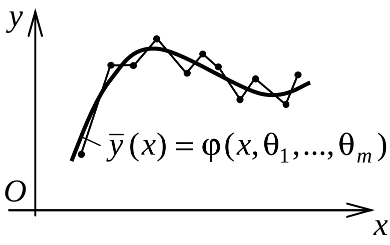


Рис. 37

Замість діаграми розсіювання можна будувати ***емпіричну*** (***вибіркову***) ***ламану регресії*** Y на X. Треба обчислити вибіркові середні $\overline{y}(x_i)$, $i=\overline{1,k}$, потім зобразити точки $(x_i,\overline{y}(x_i))$, $i=\overline{1,k}$ на координатній площині Oxy і сполучити їх послідовно відрізками прямих (рис. 37).

<u>Зауваження 1</u>. У багатьох випадках тип апроксимуючої функції $\varphi(x,\theta_1,\theta_2,...,\theta_m)$ вибирається, виходячи з теоретичних міркувань, на основі аналізу предметної області, в рамках якої будується рівняння регресії.

Для визначення оцінок невідомих параметрів $\theta_1,\theta_2,...,\theta_m$, які забезпечують найкраще узгодження кривої $\overline{y}(x)=\varphi(x,\theta_1,...,\theta_m)$ з експериментальними точками, найчастіше використовується ***метод***

найменших квадратів (МНК).

Суть МНК: оптимальні оцінки коефіцієнтів $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ вибираються з умови, щоб зважена сума квадратів $s = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 m_i$ ***нев'язок*** (відхилень) $s_i = \varphi(x_i, \theta_1, ..., \theta_m) - \bar{y}(x_i)$ між одержаним за вибіркою умовним середнім $\bar{y}(x_i)$ випадкової величини Y та його наближеним значенням $\varphi(x_i, \theta_1, ..., \theta_m)$, обчисленим за вибраною регресійною моделлю, досягала найменшого з можливих значень:

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\varphi(x_i, \theta_1, ..., \theta_m) - \bar{y}(x_i)\right)^2 m_i \xrightarrow[\theta_1, ..., \theta_m]{} \min .$$

<u>Зауваження 2</u>. Якщо похибками значень величини X можна знехтувати й усі спостереження величини Y здійснюються з однаковою точністю та їх похибки розподілені за нормальним законом, а вибраний клас апроксимуючої функції збігається з істинним, то знайдена за МНК оптимальна залежність є найімовірнішою з усіх можливих функцій.

Нехай розміщення точок на діаграмі розсіювання нагадує пряму. Тоді природно шукану регресійну залежність вважати лінійною функцією: $\boxed{y = Ax + B}$. При цьому зважена сума квадратів усіх відхилень

$$s = \sum_{i=1}^{k} s_i^2 m_i = \sum_{i=1}^{k} \left(Ax_i + B - \bar{y}(x_i)\right)^2 m_i$$

є квадратичною функцією параметрів моделі $s = s(A, B)$. Тому вона має єдиний мінімум, для знаходження якого досить скористатися необхідними умовами екстремуму:

$$\begin{cases} \partial s / \partial A = 0; \\ \partial s / \partial B = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{k} m_i x_i (Ax_i + B - \bar{y}(x_i)) = 0; \\ 2\sum_{i=1}^{k} m_i (Ax_i + B - \bar{y}(x_i)) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i\right) A + \left(\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\right) B = \sum_{i=1}^{k} x_i \, \bar{y}(x_i) m_i ; \\ \left(\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\right) A + nB = \sum_{i=1}^{k} \bar{y}(x_i) m_i . \end{cases}$$

Остання система називається ***нормальною системою*** методу найменших квадратів. Розв'язуючи цю систему, знаходимо шукані оптимальні значення параметрів A і B вибіркової регресії:

$$A = \frac{n\sum_{i=1}^{k} x_i\bar{y}(x_i)m_i - \sum_{i=1}^{k} x_i m_i \cdot \sum_{i=1}^{k} \bar{y}(x_i)m_i}{n\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\right)^2};$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i \cdot \sum_{i=1}^{k} \bar{y}(x_i)m_i - \sum_{i=1}^{k} x_i m_i \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i\bar{y}(x_i)m_i}{n\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - \left(\sum_{i=1}^{k} x_i m_i\right)^2}.$$

Розділивши почленно чисельник і знаменник кожної з одержаних оцінок на n^2, дістанемо їх вирази через вибіркові оцінки числових характеристик системи випадкових величин (X,Y):

$$\boxed{A = r_B \cdot \sigma_B(Y)/\sigma_B(X)}; \qquad \boxed{B = \bar{y} - A\bar{x}}.$$

<u>Приклад</u>. Дана кореляційна таблиця:

$Y \backslash X$	-4	-3	1	1,5	2	$n(y)$
-1	0	0	2	5	3	10
2	0	3	6	3	2	14
7	0	8	1	0	0	9
9	6	1	0	0	0	7
$m(x)$	6	12	9	8	5	40

Обчислити: вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$, вибіркові дисперсії $D_B(X)$ і $D_B(Y)$, вибіркові середні квадратичні відхилення $\sigma_B(X)$ і $\sigma_B(Y)$, умовні вибіркові середні $\bar{x}(y_j)$ і $\bar{y}(x_i)$, вибіркове змішане середнє $\overline{xy}$, вибірковий коефіцієнт кореляції r_B, оптимальні значення параметрів A і B лінійної вибіркової регресії $y = Ax + B$. Записати рівняння лінійної регресії. В одній системі координат Oxy побудувати емпіричну ламану регресії Y на X і знайдену пряму регресії.

<u>Вказівка</u>. Значення шуканих величин подати з точністю до одного десяткового знака після коми.

□ Тут $n=40$, $k=5$, $l=4$. Проведемо обчислення:

$$\overline{x}=(1/n)\sum_{i=1}^{k} m_i x_i=(1/40)(-4\cdot 6+(-3)\cdot 12+1\cdot 9+1{,}5\cdot 8+$$

$$+2\cdot 5)=-0{,}725=-0{,}7;\quad \overline{y}=(1/n)\sum_{j=1}^{l} n_j y_j=(1/40)(-1\cdot 10+$$

$$+2\cdot 14+7\cdot 9+9\cdot 7)=3{,}6;\quad D_B(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i(x_i-\overline{x})^2=(1/40)\times$$

$$\times((-4+0{,}725)^2\cdot 6+(-3+0{,}725)^2\cdot 12+(1+0{,}725)^2\cdot 9+$$

$$+(1{,}5+0{,}725)^2\cdot 8+(2+0{,}725)^2\cdot 5)=(1/40)(64{,}354+62{,}108+$$

$$+26{,}781+39{,}605+37{,}128)=5{,}750=5{,}8;$$

$$D_B(Y)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{l} n_j(y_j-\overline{y})^2=(1/40)((-1-3{,}6)^2\cdot 10+(2-3{,}6)^2\times$$

$$\times 14+(7-3{,}6)^2\cdot 9+(9-3{,}6)^2\cdot 7)=(1/40)(211{,}6+35{,}84+$$

$$+104{,}04+204{,}12)=13{,}89=13{,}9;\quad \sigma_B(X)=\sqrt{D_B(X)}=\sqrt{5{,}750}=$$

$$=2{,}398=2{,}4;\quad \sigma_B(Y)=\sqrt{D_B(Y)}=\sqrt{13{,}89}=3{,}727=3{,}7;$$

$$\overline{x}(y_j)=\frac{1}{n_j}\sum_i x_i q_{ij};\quad \overline{x}(y_1)=(1/10)(1\cdot 2+1{,}5\cdot 5+2\cdot 3)=1{,}55=$$

$$=1{,}6;\quad \overline{x}(y_2)=(1/14)(-3\cdot 3+1\cdot 6+1{,}5\cdot 3+2\cdot 2)=0{,}393=0{,}4;$$

$$\overline{x}(y_3)=(1/9)(-3\cdot 8+1\cdot 1)=-2{,}556=-2{,}6;$$

$$\overline{x}(y_4)=(1/7)(-4\cdot 6+(-3)\cdot 1)=-3{,}857=-3{,}9;$$

$$\overline{y}(x_i)=\frac{1}{m_i}\sum_j y_j q_{ij};\quad \overline{y}(x_1)=(1/6)(9\cdot 6)=9;\quad \overline{y}(x_2)=(1/12)\times$$

$$\times(2\cdot 3+7\cdot 8+9\cdot 1)=5{,}917=5{,}9;\quad \overline{y}(x_3)=(1/9)(-1\cdot 2+2\cdot 6+$$

$$+7\cdot 1)=1{,}889=1{,}9;\quad \overline{y}(x_4)=(1/8)(-1\cdot 5+2\cdot 3)=0{,}125=0{,}1;$$

$$\overline{y}(x_5)=(1/5)(-1\cdot 3+2\cdot 2)=0{,}2;\quad \overline{xy}=(1/n)\sum_{i,j} x_i y_j q_{ij};$$

$$\overline{xy} = (1/40)(-4\cdot 9\cdot 6 + (-3)\cdot 2\cdot 3 + (-3)\cdot 7\cdot 8 + (-3)\cdot 9\cdot 1 +$$
$$+1\cdot(-1)\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 6 + 1\cdot 7\cdot 1 + 1{,}5\cdot(-1)\cdot 5 +$$
$$+1{,}5\cdot 2\cdot 3 + 2\cdot(-1)\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 2) = (1/40)(-216 - 18 - 168 -$$
$$-27 - 2 + 12 + 7 - 7{,}5 + 9 - 6 + 8) = -10{,}213 = -10{,}2\,;$$

$$r_B = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\cdot\bar{y}}{\sigma_B(X)\cdot\sigma_B(Y)} = \frac{-10{,}213 - (-0{,}725)\cdot 3{,}6}{2{,}398\cdot 3{,}727} = -0{,}851 = -0{,}9\,;$$

$$A = r_B\cdot\sigma_B(Y)/\sigma_B(X) = -0{,}851\cdot 3{,}727/2{,}398 = -1{,}323 = -1{,}3\,;$$

$$B = \bar{y} - A\bar{x} = 3{,}6 - (-1{,}323)\cdot(-0{,}725) = 2{,}641 = 2{,}6\,;$$

$$y = -1{,}323x + 2{,}641;$$

x	-4	2
y	7,9	0,0

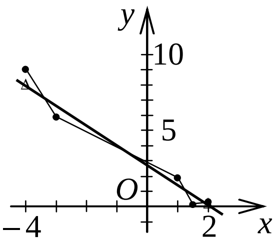


Рис. 38

Складаємо таблицю координат вершин емпіричної ламаної регресії Y на X:

x_i	-4	-3	1	1,5	2
$\bar{y}(x_i)$	9	5,9	1,9	0,1	0,2

На координатній площині Oxy будуємо емпіричну ламану регресії Y на X і емпіричну пряму регресії (рис. 38). ■

Зауваження 3. Вибірковий коефіцієнт кореляції r_B, що відображає тісноту лінійного зв’язку між вибірковими значеннями величин X і Y, за абсолютною величиною не перевищує одиниці: $|r_B| \le 1$. Якщо він дорівнює нулю, то ці значення X і Y не зв’язані лінійною кореляційною залежністю, при цьому вибіркова пряма регресії Y на X паралельна осі Ox. (Проте може спостерігатися нелінійна кореляційна чи функціональна залежність). При зростанні абсолютної величини r_B лінійна кореляційна залежність стає все більш тісною і при $|r_B| = 1$ переходить у функціональну. Якщо вибірка репрезентативна (тобто, має достатній об’єм і добре відображає генеральну сукупність), то висновок про тісноту лінійного зв'язку між величинами X і Y, одержаний за даними вибірки, в певній мірі можна поширити і на генеральну сукупність.

2.6. Перевірка статистичних гіпотез

2.6.1. Статистична гіпотеза. Статистичний критерій. Помилки першого та другого роду. Критична область. Критичні точки

Будь-який висновок, отриманий на основі обробки статистичних даних, носить імовірнісний характер і служить лише обґрунтованим науковим припущенням, оскільки не є повністю достовірним.

Нехай вибірковим методом досліджується генеральна сукупність, пов'язана з деякою випадковою величиною X. Довільне висловлення (припущення) про генеральну сукупність (випадкову величину X), що перевіряють за вибіркою (тобто за результатами спостережень), називають ***статистичною гіпотезою*** H (або просто ***гіпотезою***). Гіпотези можуть бути ***параметричними*** – припущення про параметри відомого закону розподілу, і ***непараметричними*** – припущення про вигляд невідомого закону розподілу. Розрізняють ***прості*** гіпотези, що включають лише одне припущення, і ***складні***, що містять більше одного припущення. Основну гіпотезу, висунуту за результатами обробки статистичного матеріалу, називають ***нульовою*** і позначають H_0. На противагу їй звичайно розглядають одну або декілька ***альтернативних*** (***конкуруючих***) гіпотез, які позначають H_1, H_2, …. Процедуру зіставлення гіпотези з вибірковими даними (чи не суперечить висунута гіпотеза H_0 вибірці) називають ***перевіркою гіпотези***. Якщо висунута гіпотеза H_0 відкидається, то її місце займає одна з альтернативних.

<u>Зауваження 1</u>. Вибір альтернативних гіпотез визначається конкретним формулюванням задачі. Надалі обмежимося випадком лише однієї конкуруючої гіпотези H_1.

Довільне правило, за яким приймається чи відхиляється висунута гіпотеза H_0, називають ***статистичним критерієм*** (чи просто ***критерієм***) K перевірки гіпотези H_0. Розробка таких правил та їх обґрунтування з точки зору вимог оптимальності служить предметом теорії перевірки статистичних гіпотез.

Перевірка статистичних гіпотез ґрунтується на ***принципі практичної впевненості***, згідно з яким малоймовірні події вважають неможливими, а події з близькою до одиниці ймовірністю – достовірними.

Статистичними методами гіпотезу можна лише обґрунтовано відхилити чи прийняти, але не довести як безсумнівний факт. Тобто, результат перевірки гіпотези може виявитися помилковим. Прийнято розрізняти помилки наступних двох видів.

Помилка першого роду – відкинута нульова гіпотеза H_0, у той час як вона вірна ("пропуск цілі"). Ймовірність помилки першого роду позначають α і називають ***рівнем значущості***: $\alpha = P(H_1 / H_0)$. На практиці прийнятний рівень значущості α задають наперед (звичайно з діапазону $[0{,}01; 0{,}1]$).

Помилка другого роду – прийнята нульова гіпотеза H_0, у той час як вона невірна, тобто насправді справджується альтернативна гіпотеза H_1 ("хибне спрацювання"). Ймовірність такої помилки позначають β: $\beta = P(H_0 / H_1)$. Ймовірність $1-\beta$ не допустити помилку другого роду називають ***потужністю критерію***. Чим вона більша, тим кращий критерій, тим вище надійність перевірки.

Наступна таблиця наочно ілюструє можливі помилки.

Гіпотеза H_0	Відхиляється	Приймається
Вірна	Помилка 1 – го роду	Правильне рішення
Невірна	Правильне рішення	Помилка 2 – го роду

<u>Зауваження 2</u>. При вибраному критерії та заданому рівні значущості α ймовірність β помилки другого роду можна зменшити лише за рахунок збільшення об'єму вибірки.

Загальний підхід до побудови критеріїв полягає в наступному. Розглядають вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n як спостережені значення сукупності незалежних випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$, кожна з яких має такий же розподіл, що й випадкова величина X. Формують яку-небудь випадкову величину $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ – ***статистику критерію***, що характеризує відхилення емпіричних даних $x_1, x_2, ..., x_n$ від відповідних (згідно гіпотези H_0) гіпотетичних значень і розподіл якої у випадку справедливості H_0 можна визначити.

Виходячи з припущення, що дійсно вірна гіпотеза H_0, задають прийнятний рівень значущості α і розбивають всю область значень статистики критерію U на дві підмножини S_α и $S_{1-\alpha}$, що не мають спільних елементів. Першу з них S_α називають ***критичною областю***, при потраплянні в яку гіпотезу H_0 відхиляють, а другу $S_{1-\alpha}$ – ***областю прийняття гіпотези*** H_0. Значення статистики критерію, що відокремлюють ці області одну від одної, називають ***критичними точками***. Якщо фактичне значення u статистики критерію U, обчислене за вибіркою, потрапляє в критичну область S_α: $u \in S_\alpha$, то основну гіпотезу H_0 відхиляють і приймають альтернативну гіпотезу H_1. Якщо ж $u \in S_{1-\alpha}$, то навпаки, основну гіпотезу H_0 приймають і відкидають конкуруючу гіпотезу H_1.

Можливі три випадки розміщення критичної області S_α, в залежності від вигляду нульової та конкуруючої гіпотез і закону розподілу статистики критерію U.

Правостороння критична область (рис. 39) – це інтервал $(u_{кр2,\alpha};+\infty)$, де $u_{кр2,\alpha}$ – ***правостороння критична точка***, що відповідає рівню значущості α і визначається з умови

$$P(U > u_{кр2,\alpha}) = \alpha .$$

Лівостороння критична область (рис. 40) – це інтервал $(-\infty;u_{кр1,\alpha})$, де $u_{кр1,\alpha}$ – ***лівостороння критична точка***, що відповідає рівню значущості α і визначається з умови

$$P(U < u_{кр1,\alpha}) = \alpha .$$

Двостороння критична область (рис. 41) складається з двох інтервалів $(-\infty;u_{кр1,\alpha/2})$ і $(u_{кр2,\alpha/2};+\infty)$, де $u_{кр1,\alpha/2}$ і $u_{кр2,\alpha/2}$ – ***ліва та права критичні точки***, що відповідають рівню значущості α і визначаються з умов

$$P(U < u_{кр1,\alpha/2}) = \alpha/2 \quad \text{і} \quad P(U > u_{кр2,\alpha/2}) = \alpha/2 .$$

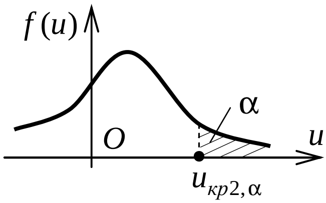


Рис. 39

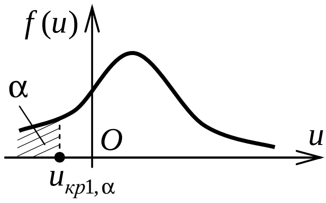


Рис. 40

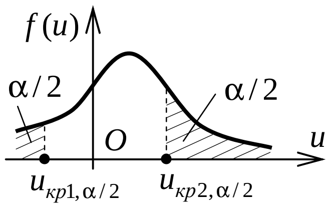


Рис. 41

Зауваження 3. Статистику критерію $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ звичайно підбирають так, щоб ця випадкова величина U мала один з наступних стандартних розподілів: стандартний нормальний розподіл, розподіл Пірсона (χ^2-розподіл), розподіл Стьюдента (t-розподіл), розподіл Фішера – Снедекора (F-розподіл). Який з них варто використовувати, залежить від характеру задачі.

Для практичного застосування критерій перевірки гіпотез можна конкретизувати і подати у вигляді наступної схеми:

1) Сформулювати основну H_0 й альтернативну H_1 гіпотези.

2) Задати прийнятний рівень значущості α.

3) Вибрати статистику критерію $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ для перевірки нульової гіпотези H_0, керуючись специфікою генеральної сукупності (випадкової величини X).

4) Визначити вибірковий розподіл статистики критерію $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ при умові, що вірна гіпотеза H_0.

5) Визначити відповідну критичну область S_α. Для цього досить знайти критичні точки, що визначають її межу. Для кожної стандартної статистики існують довідкові таблиці та комп'ютерні процедури, за якими знаходять ці точки.

6) Одержати вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ спостережень і обчислити за нею

фактичне значення u статистики критерію U.

7) Прийняти статистичне рішення: якщо $u \in S_\alpha$, то гіпотеза H_0 відхиляється, оскільки вона не узгоджується з результатами спостережень; якщо $u \notin S_\alpha$, то гіпотеза H_0 приймається, оскільки вона не суперечить результатам спостережень.

Далі розглянемо ряд типових задач перевірки гіпотез.

2.6.2. Перевірка гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини

Нехай випадкова величина X, що визначена на множині об'єктів деякої генеральної сукупності, розподілена нормально з відомою дисперсією $D(X) = \sigma^2$, а її математичне сподівання $M(X)$ невідоме.

Припустимо, що є деякі підстави вважати, що $M(X) = a$, де a – деяке число. Такими підставами можуть служити: накопичений досвід дослідження подібних випадкових величин, певні відомості про об'єкти генеральної сукупності, зокрема, одержані за результатами вибіркових досліджень і т.п. Тоді висуваємо нульову гіпотезу $\boxed{H_0:\ M(X) = a}$ при конкуруючій гіпотезі $\boxed{H_1:\ M(X) \neq a}$.

Здійснюємо вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму n. Враховуючи, що вибіркове середнє $\bar{x}$ як випадкова величина розподілене за нормальним законом з дисперсією $D(\bar{x}) = D(X)/n = \sigma^2/n$ і математичним сподіванням $M(\bar{x}) = M(X)$, можна записати нульову гіпотезу H_0 так: $M(\bar{x}) = a$. Для її перевірки можна вибрати статистику $\boxed{Z = (\bar{x} - a)/\sigma(\bar{x}) = (\bar{x} - a)\sqrt{n}/\sigma}$ як міру розбіжності між вибірковим $\bar{x}$ і генеральним a середніми. Ця випадкова величина також має нормальний розподіл, причому, якщо нульова гіпотеза H_0 вірна, то $M(Z) = 0$ і $\sigma(Z) = 1$. Подамо відповідну альтернативну гіпотезу H_1: $M(\bar{x}) \neq a$. При такому формулюванні конкуруючої гіпотези значні відхилення величини Z в обидва боки від нуля повинні приводити до висновку про хибність нульової гіпотези H_0.

Тому необхідно побудувати двосторонню критичну область S_α, що відповідає прийнятому рівню значущості α. При цьому найбільша потужність критерію досягається, якщо ймовірність влучення статистики критерію Z у кожний з двох інтервалів області S_α дорівнює $\alpha/2$. Оскільки розподіл Z симетричний відносно нуля, критичні точки також розташовані симетрично відносно нуля, тобто $(-z_{кр,\alpha/2}; z_{кр,\alpha/2})$ – область прийняття гіпотези H_0, де $z_{кр,\alpha/2}$ – критична точка, що визначається з умови $P(|Z| > z_{кр,\alpha/2}) = \alpha/2$.

Користуючись функцією Лапласа $\Phi(x)$, критичну точку $z_{кр,\alpha/2}$ можна знайти як корінь рівняння $\Phi(z_{кр,\alpha/2}) = (1-\alpha)/2$.

Нехай $z = (\bar{x} - a)\sqrt{n}\big/\sigma$ – фактичне значення статистики критерію Z, одержане за вибіркою. Тоді при $|z| < z_{кр,\alpha/2}$ нульова гіпотеза H_0 приймається, а при $|z| > z_{кр,\alpha/2}$ ця гіпотеза відхиляється.

Коли <u>генеральна дисперсія</u> $D(X)$ <u>невідома</u>, за статистику критерію приймають випадкову величину $\boxed{T = (\bar{x} - a)\sqrt{n}\big/S}$, де S – виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення. Випадкова величина T має t-розподіл (розподіл Стьюдента) з $k = n-1$ ступенями свободи. При цьому також розглядають симетричну двосторонню критичну область $S_\alpha : |t| > t_{двост,\alpha,k}$, де $t_{двост,\alpha,k}$ – критична точка розподілу Стьюдента, що відповідає прийнятому рівню значущості α.

Нехай $t = (\bar{x} - a)\sqrt{n}\big/S$ – емпіричне значення статистики критерію T, обчислене за вибіркою. Тоді при $|t| < t_{двост,\alpha,k}$ нульова гіпотеза H_0 приймається, а при $|t| > t_{двост,\alpha,k}$ ця гіпотеза відкидається.

<u>Приклад</u>. Нехай випадкова величина X розподілена за нормальним законом з невідомими дисперсією $D(X)$ і математичним сподіванням $M(X)$. Попередні дослідження дають підстави вважати, що $M(X) = a = 6$. За вибіркою $x_1, x_2, ..., x_n$ об'єму $n = 49$

знайдені вибіркове середнє $\bar{x} = 5{,}8$ і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення $S = 0{,}8$. Необхідно при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: M(X) = 6$ при альтернативній гіпотезі $H_1: M(X) \neq 6$.

□ Обчислимо фактичне значення статистики критерію T:

$$t = (\bar{x} - a)\sqrt{n}\Big/S = (5{,}8 - 6)\sqrt{49}\Big/0{,}8 = -1{,}75.$$

За таблицею розподілу Стьюдента з $k = n - 1 = 49 - 1 = 48$ ступенями свободи при $\alpha = 0{,}05$ знайдемо двосторонню критичну точку: $t_{двост,\alpha,k} = t_{двост,0{,}05;48} = 2{,}01$. Оскільки

$$|t| = 1{,}75 < t_{двост,0{,}05;48} = 2{,}01,$$

то нульова гіпотеза $H_0: M(X) = 6$ приймається. Тобто, можна вважати, що відхилення вибіркового середнього $\bar{x} = 5{,}8$ від очікуваного значення $a = 6$ математичного сподівання $M(X)$ незакономірне і зумовлене випадковими факторами. ■

2.6.3. Перевірка гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормально розподілених випадкових величин

У практиці статистичних досліджень часто виникають ситуації, коли середній результат для однієї серії випробувань відрізняється від аналогічного для іншої. Це породжує питання, чи можна виявлену розбіжність пояснити неминучими випадковими похибками експерименту, чи вона обумовлена деякими невиявленими закономірностями. Зокрема, подібні випадки спостерігаються при проведенні вибіркового контролю якості виробів, що виготовляються або різними працівниками, або на різному обладнанні чи при різних технологічних режимах.

Нехай випадкові величини X і Y розподілені нормально з відомими дисперсіями $D(X)$ і $D(Y)$, проте з невідомими математичними сподіваннями $M(X)$ і $M(Y)$. З обох генеральних сукупностей X і Y витягнуті незалежні вибірки об’єму відповідно m і n, за якими обчислені вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$. Необхідно за емпіричними середніми $\bar{x}$ і $\bar{y}$ при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $\boxed{H_0:\ M(X)=M(Y)}$ про рівність математичних сподівань при конкуруючій гіпотезі $\boxed{H_1:\ M(X)\neq M(Y)}$.

Статистикою критерію служить нормально розподілена випадкова величина $\boxed{Z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(1/m)D(X)+(1/n)D(Y)}}}$, причому, якщо нульова гіпотеза H_0 вірна, то $M(Z)=0$ і $\sigma(Z)=1$. Критична область S_α є двосторонньою симетричною і задається нерівністю $|Z|>z_{кр,\alpha/2}$, де $z_{кр,\alpha/2}$ – критична точка, що визначається як корінь рівняння $\Phi(z_{кр,\alpha/2})=(1-\alpha)/2$.

Нехай $z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(1/m)D(X)+(1/n)D(Y)}}$ – фактичне значення статистики критерію Z, одержане за вибірками з X і Y. Тоді при $|z|<z_{кр,\alpha/2}$ нульова гіпотеза H_0 приймається, а при $|z|>z_{кр,\alpha/2}$ ця гіпотеза відхиляється.

Зауваження 1. Якщо вибірки $x_1,x_2,...,x_m$ і $y_1,y_2,...,y_n$ незалежні й обидві мають значний об’єм ($m>30$ і $n>30$), то наведене правило можна застосовувати навіть тоді, коли генеральні сукупності X і Y не мають нормального розподілу та їх дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ невідомі. При цьому можна вважати, що вибіркові середні $\bar{x}$ і $\bar{y}$ як випадкові величини розподілені приблизно нормально, а вибіркові дисперсії $D_B(X)$ і $D_B(Y)$ служать досить добрими оцінками генеральних дисперсій $D(X)$ і $D(Y)$. За статистику критерію Z можна наближено прийняти $\boxed{Z=\dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(1/m)D_B(X)+(1/n)D_B(Y)}}}$.

Зауваження 2. Нехай випадкові величини X і Y розподілені нормально, причому їх дисперсії $D(X)$ і $D(Y)$ невідомі, а незалежні вибірки $x_1,x_2,...,x_m$ і $y_1,y_2,...,y_n$ мають малий об’єм, що не дозволяє одержати хороші вибіркові оцінки $D_B(X)$ і $D_B(Y)$ генеральних дисперсій $D(X)$ і $D(Y)$. Якщо припустити рівність між собою невідомих генеральних дисперсій $D(X)=D(Y)$, то за статистику критерію можна прийняти випадкову величину

$$\boxed{T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{(m-1)S^2(X)+(n-1)S^2(Y)}}\sqrt{\frac{mn(m+n-2)}{m+n}}},$$

яка при справедливості нульової гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента з $k=m+n-2$ ступенями свободи. Тут $S^2(X)$ і $S^2(Y)$ – виправлені вибіркові дисперсії. При цьому розглядають симетричну двосторонню критичну область $S_\alpha:|t|>t_{двост,\alpha,k}$, де $t_{двост,\alpha,k}$ – критична точка розподілу Стьюдента, що відповідає прийнятому рівню значущості α. Якщо емпіричне значення t статистики критерію T, обчислене за вказаними вибірками, задовольняє нерівність $|t|<t_{двост,\alpha,k}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, а у випадку $|t|>t_{двост,\alpha,k}$ ця гіпотеза відхиляється і приймається конкуруюча гіпотеза H_1.

Зауваження 3. Останній критерій слабо чутливий до припущення про нормальність розподілів випадкових величин X і Y. Його можна застосовувати, коли ці розподіли є одномодальними і не дуже асиметричними. Припущення $D(X)=D(Y)$ у багатьох випадках може бути обґрунтоване на предметному рівні (наприклад, дисперсії обох генеральних сукупностей визначаються похибками вимірювального приладу). Коли ж немає вагомих підстав вважати дисперсії однаковими, то треба перевірити гіпотезу $D(X)=D(Y)$, застосовуючи відповідний критерій (див. п. 2.6.4).

Приклад. Нехай випадкові величини X і Y розподілені нормально і мають однакові, хоча й невідомі, дисперсії $D(X)=D(Y)$. За незалежними вибірками $x_1,x_2,...,x_m$ і $y_1,y_2,...,y_n$ об'єму відповідно $m=25$ і $n=15$ знайдені вибіркові середні $\bar{x}=3{,}2$ і $\bar{y}=2{,}7$ та виправлені вибіркові дисперсії $S^2(X)=2{,}1$ і $S^2(Y)=1{,}9$, Необхідно при рівні значущості $\alpha=0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу

$H_0: M(X) = M(Y)$ про рівність математичних сподівань при альтернативній гіпотезі $H_1: M(X) \neq M(Y)$.

□ Обчислимо фактичне значення t статистики критерію T:

$$t = \frac{3{,}2 - 2{,}7}{\sqrt{(25-1)\cdot 2{,}1 + (15-1)\cdot 1{,}9}} \sqrt{\frac{25\cdot 15\cdot (25+15-2)}{25+15}} = 1{,}08.$$

За таблицею розподілу Стьюдента з $k = m + n - 2 = 25 + 15 - - 2 = 38$ ступенями свободи при $\alpha = 0{,}01$ знайдемо двосторонню критичну точку: $t_{двост,\alpha,k} = t_{двост,0{,}01;38} = 2{,}70$. Оскільки

$$|t| = 1{,}08 < t_{двост,0{,}01;38} = 2{,}70,$$

то нульова гіпотеза $H_0: M(X) = M(Y)$ приймається. Тобто, при рівні значущості $\alpha = 0{,}01$ можна вважати, що математичні сподівання випадкових величин X і Y рівні між собою. ■

2.6.4. Перевірка гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин

Гіпотези про дисперсію відіграють дуже важливу роль, оскільки величина розсіювання, що характеризується дисперсією, емпіричних вибіркових даних відносно обчислених значень відповідних параметрів дозволяє судити про придатність (адекватність) теоретичних положень, на яких ґрунтуються ці розрахунки.

На практиці необхідність порівняння дисперсій виникає при дослідженні якості налагодження обладнання, стійкості технологічних процесів, точності приладів та інструментів і т.п.

Нехай з нормально розподілених генеральних сукупностей X і Y здійснені незалежні вибірки $x_1, x_2, ..., x_m$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ об'єму відповідно m і n, за якими обчислені виправлені вибіркові дисперсії $S^2(X)$ і $S^2(Y)$, що звичайно є різними. Припустимо, для визначеності, $\boxed{S^2(X) \geq S^2(Y)}$. Нехай варто встановити, чи взяті розглянуті вибірки з нормальних генеральних сукупностей X і Y з однаковою дисперсією $D(X) = D(Y)$.

Необхідно при заданому рівні значущості α за емпіричними оцінками $S^2(X)$ і $S^2(Y)$ генеральних дисперсій $D(X)$ і $D(Y)$ перевірити нульову гіпотезу $\boxed{H_0: D(X) = D(Y)}$ про рівність останніх при альтернативній гіпотезі $\boxed{H_1: D(X) > D(Y)}$, яка полягає в тому, що генеральна дисперсія більша у тієї випадкової величини X, в якої більша виправлена вибіркова дисперсія.

Статистикою критерію служить випадкова величина F, що є <u>відношенням більшої</u> виправленої вибіркової дисперсії $S^2(X)$ <u>до меншої</u> $S^2(Y)$: $\boxed{F = S^2(X) / S^2(Y)}$, яка при справедливості нульової гіпотези H_0 має F-розподіл (розподіл Фішера – Снедекора) з $k_1 = m-1$ і $k_2 = n-1$ ступенями свободи.

У цій задачі природно розглядати правосторонню критичну область S_α, що задається нерівністю $F > F_{кр,\alpha,k_1,k_2}$, де $F_{кр,\alpha,k_1,k_2}$ – правостороння критична точка розподілу Фішера – Снедекора, що відповідає прийнятому рівню значущості α.

Якщо емпіричне значення $f = S^2(X) / S^2(Y)$ статистики критерію F, обчислене за вказаними вибірками, задовольняє нерівність $f < F_{кр,\alpha,k_1,k_2}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, а у випадку $f > F_{кр,\alpha,k_1,k_2}$ ця гіпотеза відкидається і приймається конкуруюча гіпотеза H_1.

<u>Приклад</u>. Нехай відносно певної спільної кількісної ознаки проводиться вибірковий контроль двох множин – генеральних сукупностей X і Y – деяких деталей, що виготовлені відповідно на першому та другому верстатах. Відомо, що генеральні сукупності X і Y розподілені за нормальним законом. За результатами досліджень сформовані дві незалежні вибірки $x_1, x_2, ..., x_m$ і $y_1, y_2, ..., y_n$ об'єму відповідно $m = 9$ і $n = 11$, за якими обчислені виправлені вибіркові дисперсії $S^2(X) = 1{,}55$ і $S^2(Y) = 0{,}45$. Необхідно при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0 про рівність генеральних дисперсій $D(X) = D(Y)$ при конкуруючій гіпо-

тезі H_1: $D(X) > D(Y)$.

□ Обчислимо фактичне значення f статистики критерію F:

$$f = S^2(X) \big/ S^2(Y) = 1{,}55/0{,}45 = 3{,}44 .$$

За таблицею F-розподілу з $k_1 = m - 1 = 9 - 1 = 8$ і $k_2 = n - 1 = 11 - 1 = 10$ ступенями свободи при $\alpha = 0{,}05$ знайдемо критичну точку: $F_{кр,\alpha,k_1,k_2} = F_{кр;0{,}05;8;10} = 3{,}07$. Оскільки

$$f = 3{,}44 > F_{кр;0{,}05;8;10} = 3{,}07 ,$$

то нульова гіпотеза H_0 про рівність генеральних дисперсій $D(X)$ і $D(Y)$ відхиляється. Тобто, при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ можна вважати, що справджується альтернативна гіпотеза H_1: дисперсія $D(X)$ випадкової величини X значущо перевищує дисперсію $D(Y)$ випадкової величини Y. ■

2.6.5. Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини

У багатьох практичних задачах при дослідженні випадкової величини X навіть вигляд її закону розподілу наперед невідомий. Якщо закон розподілу генеральної сукупності визначається за вибіркою, то виникає необхідність оцінити, якою є розбіжність між емпіричним і прийнятим теоретичним розподілами – випадковою чи значущою. Критерій перевірки гіпотези про гаданий закон невідомого розподілу називають ***критерієм згоди***.

Найпоширеніший критерій згоди – це ***критерій*** χ^2 (***критерій Пірсона***), який може використовуватися для перевірки гіпотези про довільний закон розподілу. Розглянемо його застосовування для перевірки гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини X.

Нехай з генеральної сукупності X з невідомою функцією розподілу $F(x)$ здійснено вибірку $x_1, x_2, ..., x_n$ досить великого об’єму n ($n \geq 50$) зі значним числом різних варіант, за якою сформовано інтервальний статистичний ряд

i	1	2	…	$m-1$	m	–
x_i	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	…	$[a_{m-2};a_{m-1})$	$[a_{m-1};a_m]$	$\sum_{i=1}^{m}$
n_i	n_1	n_2	…	n_{m-1}	n_m	n

так, що $n_i \ge 5$, $i=\overline{1,m}$, де m – число елементарних інтервалів (у загальному випадку, нерівномірних).

Виходячи з рівня значущості α, висувається нульова гіпотеза $\boxed{H_0: X \text{ має нормальний закон розподілу}}$ при альтернативній гіпотезі $\boxed{H_1: X \text{ має відмінний від нормального закон розподілу}}$.

Зауваження. Якщо виявиться, що для деякого i-го частинного проміжку умова $n_i \ge 5$ не виконується, то його треба об'єднати з сусіднім інтервалом.

Статистикою критерію служить випадкова величина $\boxed{\chi^2 = \sum_{i=1}^{m}(n_i - n_{T\,i})^2 \big/ n_{T\,i}}$, де n_i і $n_{T\,i}$ – відповідно емпірична (спостережена) і теоретична частота попадання вибіркових значень випадкової величини X в i-й частинний інтервал з кінцями a_{i-1} і a_i, $i=\overline{1,m}$. Теоретична частота $n_{T\,i}$ обчислюється як кількість вибіркових значень, які повинні потрапити в i-й інтервал при умові, що випадкова величина X розподілена за прийнятим нормальним законом, параметри якого співпадають з їх точковими оцінками за цією ж вибіркою: $\boxed{a=\bar{x}}$ і $\boxed{\sigma=\sigma_B}$. Нехай

$$\boxed{p_i = P(a_{i-1} < X < a_i) = \Phi\big((a_i-\bar{x})/\sigma_B\big) - \Phi\big((a_{i-1}-\bar{x})/\sigma_B\big)}$$

– теоретична ймовірність попадання випадкової величини X, що за припущенням має вибраний нормальний розподіл, в i-й частинний інтервал. Тоді дістанемо $\boxed{n_{T\,i} = n\,p_i}$. Тут $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Статистика критерію χ^2 характеризує близькість емпіричного й теоретичного розподілів: чим краще узгоджені ці розподіли, тим менше розрізняються емпіричні й теоретичні частоти і, відповідно, менше значення статистики критерію.

Необхідно знати розподіл статистики критерію χ^2 як випадкової величини у припущенні, що нульова гіпотеза H_0 справджується. Точний розподіл випадкової величини χ^2 незручний для обчислень. Проте у випадку вибірки великого об'єму n ($n \geq 50$), для якої $n_i \geq 5$ ($i = \overline{1,m}$), статистика критерію χ^2 при вірності гіпотези H_0 наближено має досить простий χ^2-розподіл. Пірсон довів, що *незалежно від того, який розподіл реально має випадкова величина* X, *закон розподілу статистики критерію* χ^2 *при* $n \to \infty$ *прямує до* χ^2 *- розподілу з* $k = m - 1 - s$ *ступенями свободи, де* s *– число параметрів прийнятого за припущенням теоретичного закону розподілу, що оцінюються за даними вибірки.*

Оскільки нормальний закон характеризується двома параметрами a і σ, то для нього $\boxed{k = m - 3}$.

Для вибраної статистики критерію χ^2 розглядається правостороння критична область S_α, що задається нерівністю $\chi^2 > \chi^2_{кр,\alpha,k}$, де $\chi^2_{кр,\alpha,k}$ – правостороння критична точка χ^2- розподілу, що відповідає прийнятому рівню значущості α.

Якщо емпіричне значення $\chi^2_B = \sum_{i=1}^{m} (n_i - n_{T\,i})^2 \big/ n_{T\,i}$ статистики критерію χ^2, обчислене за вибіркою, задовольняє нерівність $\chi^2_B < \chi^2_{кр,\alpha,k}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, тобто за даними спостережень випадкова величина X має нормальний закон розподілу, розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами носить випадковий характер і є незначущою. У випадку $\chi^2_B > \chi^2_{кр,\alpha,k}$ гіпотеза H_0 відхиляється і приймається конкуруюча гіпотеза H_1, тобто випадкова величина X має відмінний від нормального закон розподілу, розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами суттєва.

Приклад. Для вибірки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з генеральної сукупності X, інтервальний статистичний ряд якої подано наступною таблицею, необхідно при рівні значущості $\alpha = 0{,}05$ перевірити нульову гіпотезу H_0: X має нормальний закон розподілу при альтернативній гіпотезі H_1: X має відмінний від нормального закон розподілу за допомогою критерію Пірсона.

Номер інтервалу i	Ліва межа інтервалу a_{i-1}	Права межа інтервалу a_i	Емпірична частота n_i
1	-3	1	5
2	1	5	6
3	5	8	9
4	8	10	18
5	10	12	22
6	12	15	19
7	15	17	14
8	17	20	5
9	20	22	2

□ Оскільки $n_9 = 2 < 5$, то дев'ятий інтервал об'єднаємо з сусіднім. Тоді статистичний ряд набуде вигляду:

Номер інтервалу i	Ліва межа інтервалу a_{i-1}	Права межа інтервалу a_i	Емпірична частота n_i
1	-3	1	5
2	1	5	6
3	5	8	9
4	8	10	18
5	10	12	22
6	12	15	19
7	15	17	14
8	17	22	7

Число частинних інтервалів $m = 8$, число ступенів свободи $k = m - 3 = 8 - 3 = 5$, об'єм вибірки

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i = 5 + 6 + 9 + 18 + 22 + 19 + 14 + 7 = 100.$$

Будемо вважати варіантами $x_1, x_2, ..., x_m$ середини елементарних інтервалів $x_i = (a_{i-1} + a_i)/2$:

$$x_1=(-3+1)/2=-1;\quad x_2=(1+5)/2=3;\quad x_3=(5+8)/2=6{,}5;$$

$$x_4=(8+10)/2=9;\; x_5=(10+12)/2=11;\; x_6=(12+15)/2=13{,}5;$$

$$x_7=(15+17)/2=16;\qquad x_8=(17+22)/2=19{,}5.$$

За одержаними варіантами знайдемо вибіркові оцінки параметрів гаданого нормального закону розподілу $a=\bar{x}$ і $\sigma=\sigma_B$:

$$\bar{x}=(1/n)\sum_{i=1}^{m} n_i\, x_i=(5\cdot(-1)+6\cdot 3+9\cdot 6{,}5+18\cdot 9+22\cdot 11+19\times$$

$$\times 13{,}5+14\cdot 16+7\cdot 19{,}5)/100=10{,}9;\quad a=\bar{x}=10{,}9;$$

$$D_B=(1/n)\sum_{i=1}^{m} n_i\,(x_i-\bar{x})^2=(5\cdot(-1-10{,}9)^2+6\cdot(3-10{,}9)^2+$$

$$+9\cdot(6{,}5-10{,}9)^2+18\cdot(9-10{,}9)^2+22\cdot(11-10{,}9)^2+19\cdot(13{,}5-$$

$$-10{,}9)^2+14\cdot(16-10{,}9)^2+7\cdot(19{,}5-10{,}9)^2)/100=24{,}19;$$

$$\sigma_B=\sqrt{D_B}=\sqrt{24{,}19}=4{,}92;\quad \sigma=\sigma_B=4{,}92.$$

Обчислимо теоретичні ймовірності $n_{T\,i}$ і відповідні теоретичні частоти $n_{T\,i}=n\,p_i$ попадання випадкової величини X, в i-й частинний інтервал ($i=\overline{1,m}$) у припущенні про нормальний закон розподілу зі знайденими параметрами $a=\bar{x}=10{,}9$ і $\sigma=\sigma_B=4{,}92$:

$$p_i=\Phi\big((a_i-\bar{x})/\sigma_B\big)-\Phi\big((a_{i-1}-\bar{x})/\sigma_B\big);$$

$$p_1=\Phi\big((1-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((-3-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(-2{,}01)-$$

$$-\Phi(-2{,}83)=-\Phi(2{,}01)+\Phi(2{,}83)=-0{,}47778+0{,}49683=0{,}0191;$$

$$n_{T\,1}=100\cdot 0{,}0191=1{,}91;\qquad p_2=\Phi\big((5-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((1-$$

$$-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(-1{,}20)--\Phi(-2{,}01)=-\Phi(1{,}20)+\Phi(2{,}01)=$$

$$=-0{,}38493+0{,}47778=0{,}0929;\qquad n_{T\,2}=100\cdot 0{,}0929=9{,}29;$$

$$p_3=\Phi\big((8-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((5-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(-0{,}59)-$$

$$-\Phi(-1{,}20)=-\Phi(0{,}59)+\Phi(1{,}20)=-0{,}22240+0{,}38493=0{,}1625;$$

$$n_{T\,3}=100\cdot 0{,}1625=16{,}25;\qquad p_4=\Phi\big((10-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((8-$$

$$-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(-0{,}18)-\Phi(-0{,}59)=-\Phi(0{,}18)+\Phi(0{,}59)=$$

$$=-0{,}07142+0{,}22240=0{,}1510;\quad n_{T\,4}=100\cdot 0{,}1510=15{,}10;$$

$$p_5=\Phi\big((12-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((10-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(0{,}22)-$$

$$-\Phi(-0{,}18)=\Phi(0{,}22)+\Phi(0{,}18)=0{,}08706+0{,}07142=0{,}1585;$$

$$n_{T\,5}=100\cdot 0{,}1585=15{,}85;\quad p_6=\Phi\big((15-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((12-$$

$$-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(0{,}83)-\Phi(0{,}22)=0{,}29673-0{,}08706=0{,}2097;$$

$$n_{T\,6}=100\cdot 0{,}2097=20{,}97;\quad p_7=\Phi\big((17-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((15-$$

$$-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(1{,}24)-\Phi(0{,}83)=0{,}39251-0{,}29673=0{,}0958;$$

$$n_{T\,7}=100\cdot 0{,}0958=9{,}58;\quad p_8=\Phi\big((22-10{,}9)/4{,}92\big)-\Phi\big((17-$$

$$-10{,}9)/4{,}92\big)=\Phi(2{,}26)-\Phi(0{,}83)=0{,}48809-0{,}39251=0{,}0956;$$

$$n_{T\,8}=100\cdot 0{,}0956=9{,}56.$$

Обчислимо за вибіркою фактичне значення χ_B^2 статистики критерію χ^2:

$$\chi_B^2=\sum\nolimits_{i=1}^{m}(n_i-n_{T\,i})^2\Big/n_{T\,i}=(5-1{,}91)^2/1{,}91+(6-9{,}29)^2/9{,}29+$$

$$+(9-16{,}25)^2/16{,}25+(18-15{,}10)^2/15{,}10+(22-15{,}85)^2/15{,}85+$$

$$+(19-20{,}97)^2/20{,}97+(14-9{,}58)^2/9{,}58+(7-9{,}56)^2/9{,}56=$$

$$+(19-20{,}97)^2/20{,}97+(14-9{,}58)^2/9{,}58+(7-9{,}56)^2/9{,}56=$$

$$=4{,}999+1{,}165+3{,}235+0{,}557+2{,}386+0{,}185+2{,}039+0{,}686=$$

$$=15{,}25.$$

За таблицею χ^2-розподілу з $k=5$ ступенями свободи при $\alpha=0{,}05$ знайдемо критичну точку: $\chi^2_{кр,\alpha,k}=\chi^2_{кр;0{,}05;5}=11{,}1$.

Оскільки $\chi_B^2=15{,}25>\chi^2_{кр;0{,}05;5}=11{,}1$, то гіпотеза H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності X відхиляється, розбіжність між емпіричними і теоретичними частотами значуща. ■

2.6.6. Перевірка гіпотези про значущість коефіцієнта кореляції

Нехай з нормально розподіленої двовимірної генеральної сукупності (X,Y) здійснено вибірку $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$ об'єму n, за якою обчислено вибірковий коефіцієнт кореляції r_B, що служить статистичною оцінкою коефіцієнта кореляції r генеральної сукупності. Якщо емпіричне значення r_B виявилося відмінним від нуля, то це ще не означає відмінність від нуля генерального коефіцієнта кореляції r. Тому перед тим, як робити висновок про наявність і ступінь корельованості випадкових величин X і Y, треба за вибіркою при заданому рівні значущості α перевірити нульову гіпотезу $\boxed{H_0:\ r=0}$ при конкуруючій гіпотезі $\boxed{H_1:\ r\neq 0}$.

Статистикою критерію служить випадкова величина

$$\boxed{T=r_B\sqrt{(n-2)\big/(1-r_B^2)}},$$

яка при справедливості нульової гіпотези H_0 має розподіл Стьюдента з $k=n-2$ ступенями свободи.

Оскільки r_B приймає значення з проміжку $[-1;1]$, то відносно великим відхиленням в обидва боки від нуля значенням вибіркового коефіцієнта кореляції r_B відповідають близькі до одиниці значення його модуля $|\,r_B\,|$. Тому природно розглядати симетричну двосторонню критичну область S_α, що задається нерівністю $|\,t\,|>t_{двост,\alpha,k}$, де $t_{двост,\alpha,k}$ – критична точка розподілу Стьюдента, що відповідає прийнятому рівню значущості α.

Якщо емпіричне значення $t=r_B\sqrt{(n-2)\big/(1-r_B^2)}$ статистики критерію T, обчислене за даною вибіркою, задовольняє нерівність $|\,t\,|<t_{двост,\alpha,k}$, то нульова гіпотеза H_0 приймається, вибірковий коефіцієнт кореляції r_B вважається статистично незначущим, величини X і Y некорельовані. У випадку $|\,t\,|>t_{двост,\alpha,k}$ ця гіпотеза відхиляється і приймається конкуруюча гіпотеза H_1, вибірковий коефіцієнт кореляції r_B вважається статистично значущим, величини X і Y корельовані.

Приклад 1. За вибіркою об'єму $n=30$ з двовимірної генеральної сукупності (X, Y), що має нормальний розподіл, обчислено емпіричне значення $r_B=-0{,}68$ коефіцієнта кореляції r між X і Y. Необхідно при рівні значущості $\alpha=0{,}02$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: r=0$ при альтернативній гіпотезі $H_1: r \neq 0$.

□ Обчислимо фактичне значення t статистики критерію T:

$$t=r_B\sqrt{(n-2)/(1-r_B^2)}=-0{,}68\cdot\sqrt{(30-2)/(1-(-0{,}68)^2)}=-4{,}91.$$

За таблицею розподілу Стьюдента з $k=n-2=30-2=28$ ступенями свободи при $\alpha=0{,}02$ знайдемо двосторонню критичну точку: $t_{двост,\alpha,k}=t_{двост,0{,}02;28}=2{,}47$. Оскільки

$$|t|=4{,}91>t_{двост,0{,}02;28}=2{,}47,$$

то нульова гіпотеза $H_0: r=0$ відхиляється. Тобто, при рівні значущості $\alpha=0{,}02$ можна вважати, що емпіричний коефіцієнт кореляції r_B значущо відмінний від нуля, випадкові величини X і Y корельовані. ■

Зауваження. Якщо об'єм вибірки n малий, а емпіричне значення r_B коефіцієнта кореляції за модулем близьке до одиниці, то за статистику критерію необхідно прийняти випадкову величину $\boxed{T=\frac{\sqrt{n-3}}{2}\ln\frac{1+r_B}{1-r_B}}$, що при вірності нульової гіпотези H_0 також має розподіл Стьюдента з $k=n-2$ ступенями свободи.

Приклад 2. За вибіркою об'єму $n=7$ з двовимірної нормальної генеральної сукупності (X, Y) обчислено емпіричне значення $r_B=0{,}96$ коефіцієнта кореляції r між X і Y. Необхідно при рівні значущості $\alpha=0{,}01$ перевірити нульову гіпотезу $H_0: r=0$ при альтернативній гіпотезі $H_1: r \neq 0$.

(Розв'язати самостійно. За статистику критерію прийняти $T=\left(\sqrt{n-3}/2\right)\ln\left((1+r_B)/(1-r_B)\right)$. Відповідь: гіпотеза H_0 приймається.)

2.7. Контрольні запитання до змістового модулю “Математична статистика”

1. Що таке математична статистика?
2. У чому полягає предмет математичної статистики?
3. Які основні задачі математичної статистики?
4. Що таке генеральна сукупність і вибіркова сукупність (вибірка)? У чому різниця між ними?
5. Яким умовам повинна задовольняти вибірка?
6. Опишіть способи відбору при формуванні вибірки.
7. Поясніть зміст вибіркового методу.
8. Що таке варіанта і варіаційний ряд?
9. Що таке частота і відносна частота варіанти? Емпірична щільність розподілу?
10. Що таке дискретний статистичний ряд? Інтервальний статистичний ряд?
11. Що таке полігон відносних частот і гістограма відносних частот?
12. Що таке емпірична функція розподілу і кумулятивна крива (кумулята)?
13. Що таке статистична оцінка параметра розподілу?
14. Чим відрізняються точкова й інтервальна оцінки параметра розподілу?
15. Що таке надійність (довірча ймовірність) і рівень значущості інтервальної оцінки?
16. Що служить незміщеною спроможною вибірковою оцінкою математичного сподівання?
17. Що служить спроможною вибірковою оцінкою дисперсії? У чому різниця між вибірковою дисперсією і виправленою вибірковою дисперсією?
18. Що таке вибіркове середнє квадратичне відхилення і виправлене вибіркове середнє квадратичне відхилення?
19. Дайте означення моди і медіани вибірки.
20. Як знаходять довірчі інтервали для математичного сподівання та дисперсії при різних припущеннях?
21. Що таке кореляційна таблиця?
22. Як для двовимірної випадкової величини (X,Y) визначають вибіркові оцінки: математичних сподівань і дисперсій, умовних математичних сподівань і дисперсій, коефіцієнта кореляції?

23. У чому полягає предмет і мета кореляційного аналізу?
24. В якому діапазоні лежать значення коефіцієнта кореляції?
25. З яких міркувань визначають тип кореляційної залежності $\overline{y}(x)=\varphi(x)$?
26. Що таке діаграма розсіювання (кореляційне поле) і емпірична (вибіркова) ламана регресії?
27. У чому суть методу найменших квадратів оцінки параметрів рівняння регресії?
28. Як одержують нормальну систему методу найменших квадратів?
29. Що таке статистична гіпотеза? Нульова й альтернативна (конкуруюча) гіпотези?
30. Що таке статистичний критерій перевірки гіпотез?
31. У чому полягає принцип практичної впевненості?
32. Поясніть значення термінів: статистика критерію, критична область, область прийняття гіпотези, критична точка.
33. В яких випадках вибирають лівосторонню, правосторонню чи двосторонню критичну область?
34. Які результати перевірки гіпотези відносять до помилок першого і другого роду?
35. Наведіть загальну схему критерію перевірки гіпотез.
36. Опишіть критерій перевірки гіпотези про математичне сподівання нормально розподіленої випадкової величини.
37. Коли на практиці виникає необхідність порівняння математичних сподівань? Як реалізується критерій перевірки гіпотези про рівність математичних сподівань двох нормально розподілених випадкових величин?
38. Коли на практиці виникає необхідність порівняння дисперсій? Опишіть критерій перевірки гіпотези про рівність дисперсій двох нормально розподілених випадкових величин
39. Що таке критерій згоди? Як здійснюється перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу випадкової величини за критерієм Пірсона?
40. Як перевіряється гіпотеза про значущість коефіцієнта кореляції?

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.

2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. школа, 1999. – 576 с.

3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высш. шк., 2004. – 479 с.

4. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 2005. – 404 с.

5. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей: Справочное пособие к решению задач. – Мн.: НТООО “Тетра Системс”, 2000. – 288 с.

6. Жалдак М.І., Кузьміна Н.М., Берлінська С.Ю. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології. – К.: Вища шк., 1995. – 351 с.

7. Жевняк Р.М., Карпук А.А., Унукович В.Т. Теория вероятностей и математическая статистика. – Мн.: Харвест, 2000. – 384 с.

8. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. –М.: Наука, 1989. – 132 с.

9. Колде Я.К. Практикум по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высш. шк., 1991. – 158 с.

10. Копич І.М., Сороківський В.М. Елементи теорії ймовірностей і математичної статистики: теорія та практикум. – Львів: Вид-во ЛКА, 2001. – 336 с.

11. Кремер И.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2006. – 573 с.

12. Методичні вказівки для практичних, самостійних та контрольних робіт з теорії ймовірностей та математичної статистики / Ю.Є. Печеніжський, С.О. Станішевський, В.С. Рухляда. – Х.: ХНАМГ, 2009. – 64 с.

13. Минько А.А. Статистический анализ в MS Excel. – М.: Изд. дом “Вильямс”, 2004. – 488 с.

14. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. – Донецьк: Сталкер, 2003. – 495 с.

15. Самойленко М.І., Кузнецов А.І., Костенко О.Б. Теорія ймовірностей. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 194 с.

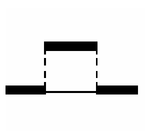
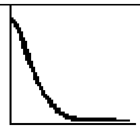
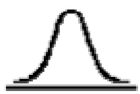
16. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / Под ред. В.С. Королюка. – К.: Наук. думка, 1978. – 582 с.

17. Теорія імовірностей і математична статистика / А.Є. Ачкасов, В.Т. Плакіда та ін. – Х.: ХНАМГ, 2008. – 247 с.

ДОДАТКИ

Додаток 1

Найважливіші дискретні розподіли				
Назва розподілу	Ряд розподілу p_i	Параметри та їх можливі значення	Математичне сподівання M	Дисперсія D
Біноміальний	$C_n^i p^i q^{n-i}$, $i = 0,1,\ldots,n$ $(q = 1 - p)$	n $(1,2,\ldots)$; p $(0 \le p \le 1)$	np	npq
Пуассонівський	$a^i e^{-a} / i!$, $i = 0,1,\ldots,n$	a $(a > 0)$	a	a

Найважливіші неперервні розподіли				
Назва розподілу	Щільність розподілу $f(x)$	Схема графіка $f(x)$	Математичне сподівання M	Дисперсія D
Рівномірний	$1/(\beta - \alpha)$, $\alpha \le x \le \beta$ і 0 в інших випадках		$\dfrac{\alpha + \beta}{2}$	$\dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$
Показниковий	$\lambda e^{-\lambda x}$, $x > 0$ і 0 в інших випадках		$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Нормальний	$\dfrac{e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, $-\infty < x < +\infty$		a	σ^2

Додаток 2

Значення функції Гаусса $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139

2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Додаток 3

Значення функції Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-u^2/2}du$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,00000	00399	00798	01197	01595	01994	02392	02790	03188	03586
0,1	03983	04380	04776	05172	05567	05962	06356	06749	07142	07535
0,2	07926	08317	08706	09095	09483	09871	10257	10642	11026	11409
0,3	11791	12172	12552	12930	13307	13683	14058	14431	14803	15173
0,4	15542	15910	16276	16640	17003	17364	17724	18082	18439	18793
0,5	19146	19497	19847	20194	20540	20884	21226	21566	21904	22240
0,6	22575	22907	23237	23565	23891	24215	24537	24857	25175	25490
0,7	25804	26115	26424	26730	27035	27337	27637	27935	28230	28524
0,8	28814	29103	29389	29673	29955	30234	30511	30785	31057	31327
0,9	31594	31859	32121	32381	32639	32894	33147	33398	33646	33891
1,0	0,34134	34375	34614	34850	35083	35314	35543	35769	35993	36214
1,1	36433	36650	36864	37076	37286	37493	37698	37900	38100	38298
1,2	38493	38686	38877	39065	39251	39435	39617	39796	39973	40147
1,3	40320	40490	40658	40824	40988	41149	41309	41466	41621	41774

1,4	41924	42073	42220	42364	42507	42647	42786	42922	43056	43189
1,5	43319	43448	43574	43699	43822	43943	44062	44179	44295	44408
1,6	44520	44630	44738	44845	44950	45053	45154	45254	45352	45449
1,7	45543	45637	45728	45818	45907	45994	46080	46164	46246	46327
1,8	46407	46485	46562	46638	46712	46784	46856	46926	46995	47062
1,9	47128	47193	47257	47320	47381	47441	47500	47558	47615	47670
2,0	0,47725	47778	47831	47882	47932	47982	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48745	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49134	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49598	49609	49621	49632	49643
2.7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861

x	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$\Phi(x)$	0,49865	0,49903	0,49931	0,49952	0,49966	0,49977	0,49984
x	3,7	3,8	3,9	4,0	4,5	5,0	
$\Phi(x)$	0,49989	0,49993	0,49995	0,499968	0,499997	0,49999997	

Додаток 4

Критичні точки $t_{\alpha,k}$ t-розподілу (розподілу Стьюдента)

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α (двостороння критична область $P\left(\vert t \vert > t_{двост,\alpha,k}\right)=\alpha$)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,29	636,6
2	2,92	4,3	6,96	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,6	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87

6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3	3,5	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,9	3,36	4,5	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,3	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,8	2,2	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,6	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,9	3,65	3,97
18	1,73	2,1	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,5	3,79
23	1,71	2,07	2,5	2,81	3,48	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,8	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,7	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,7	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,7	2,05	2,46	2,76	3,4	3,66
30	1,7	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,7	3,31	3,55
60	1,67	2	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
	Рівень значущості α (одностороння критична область $P(\|t > t_{одност,\alpha,k})= \alpha$)					

Додаток 5

Критичні точки $F_{кр,\alpha,k_1,k_2}$ F -розподілу

(розподілу Фішера – Снедекора) $P\left(F > F_{кр,\alpha,k_1,k_2}\right) = \alpha$

$\alpha = 0{,}05$								
k_2 \ k_1	2	3	4	5	6	8	12	24
2	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,41	19,45
3	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,84	8,74	8,64
5	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,68	4,53
6	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,00	3,84
8	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,28	3,12
10	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,91	2,74
12	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,85	2,69	2,50
15	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,48	2,29
17	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,55	2,38	2,19
20	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,28	2,08
25	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,16	1,96
30	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,09	1,89
40	3,23	2,84	2,62	2,45	2,34	2,18	2,00	1,79
60	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,10	1,92	1,70
120	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,83	1,61
$\alpha = 0{,}01$								
2	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,42	99,46
3	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,49	27,05	26,60
5	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	9,98	9,47

6	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,72	7,31
8	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,67	5,28
10	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,71	4,33
12	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,50	4,16	3,78
15	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,00	3,67	3,29
17	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,79	3,45	3,08
20	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,23	2,86
25	5,57	4,68	4,18	3,86	3,63	3,32	2,99	2,62
30	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,84	2,47
40	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	2,99	2,66	2,29
60	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,82	2,50	2,12
120	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,66	2,34	1,95

Додаток 6

Критичні точки $\chi^2_{кр,\alpha,k}$ χ^2-розподілу

(розподілу Пірсона) $P\left(\chi^2 > \chi^2_{кр,\alpha,k}\right) = \alpha$

Число ступенів свободи k	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,3	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554

6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

З М І С Т

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Колосов Анатолій Іванович,
Печеніжський Юрій Євгенович,
Станішевський Степан Олександрович,
Якунін Анатолій Вікторович

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ і МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
(для студентів 2 курсу заочної форми навчання
за напрямами підготовки 6.030504 „Економіка підприємства"
і 6.030509 "Облік і аудит")

Відповідальний за випуск *Л. Б. Коваленко*
Редактор *З. І. Зайцева*
Комп'ютерне верстання *А. В. Якунін*

План 2011, поз. 97Л

Підп. до друку 28.11.2011 Формат 60x84 1/16
Друк на ризографі Ум. друк. арк. 7,0
Тираж 100 пр. Зам. №

Видавець і виготовлювач:
Харківська національна академія міського господарства,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12.05.2011